

3. ВНУТРЕННИЕ СИЛЫ. НАПРЯЖЕНИЯ

3.1. Напряжения

Уровень оценки прочности по нагрузке отличают простота и доступность. Расчеты при этом чаще всего минимальны - требуется определить только саму нагрузку. Для выполнения поверочного расчета достаточно получить навыки в определении нагрузки, пользовании банком предельных характеристик и сравнении рабочей и предельной ее величины. Проектировочный расчет на этом уровне выполняется выбором из банка данных такого сооружения, для которого допустимая нагрузка не меньше расчётной (в рабочем состоянии).

Навыками работы на уровне нагрузки должен обладать всякий специалист, чья деятельность в той или иной степени связана со строительством. Но если он только это и умеет, то его деятельность скована и ограничена главным образом объемом банка данных. Кроме того, нужно понимать, что по нагрузке нельзя выявить причины недоступности эксплуатации заданного сооружения в конкретных условиях. Невозможно установить, как и какими конструктивными решениями противостоять разрушению. Весьма трудно пополнить банк данных. И тем более немыслимо оценить резерв прочности в изменившихся условиях или степень использования прочностных свойств материала в отдельных частях сооружения. Невозможно оптимизировать конструктивные решения и решить целый ряд других практических инженерных задач. Это обусловлено тем, что при расчете нагрузки определяются силы во внешних по отношению к сооружению связях, само же сооружение при этом считается цельным (нерушимым) и что происходит в нем самом неизвестно. Нагрузка только способствует степени напряженности внутренних связей, несущих “полную ответственность” за сохранность сооружения. И поэтому, чтобы ставить и решать практические вопросы конструирования, необходимо изучить работу внутренних связей.

Обратимся к модели, построенной выше, согласно которой сооружение - тело, состоящее из множества бесконечно прочных частиц, соединенных между собой связями. Всякие изменения в таком теле (удлинения, деформации, разрушения) возможны только за счет изменения состояния связей.

Чтобы поставить математически и решить задачу о напряженности внутренних связей, введем гипотезы об их качестве. Будем считать, что связи заполняют тело сплошь - *гипотеза сплошности*. Это позволит нам рассматривать состояние сколь угодно малой частицы тела вплоть до отдельной точки и использовать для описания всего сооружения и

отдельных его частей непрерывные функции. Гипотеза сплошности в подавляющем большинстве случаев отвечает реальной физической природе тел, в которых частицы (даже конечных размеров), его составляющие, малы по сравнению с размерами всего тела (сооружения).

Каждая материальная точка в сплошном теле множеством связей соединена с другими точками. Выделим мысленно одну из них. При этом мы вынуждены на основании известного из теоретической механики принципа и самой концепции сил отбросить все окружающие ее связи и заменить их действие силами. Так как любая точка в теле находится в равновесии, то мы не обнаружим этих сил. Только разделив силы на отдельные группы, мы получаем возможность их изучать. Произвольной плоскостью ν , проведенной через точку M (рис.3.1), разделим связи (силы) на две группы (связи с одной стороны от плоскости и с другой).

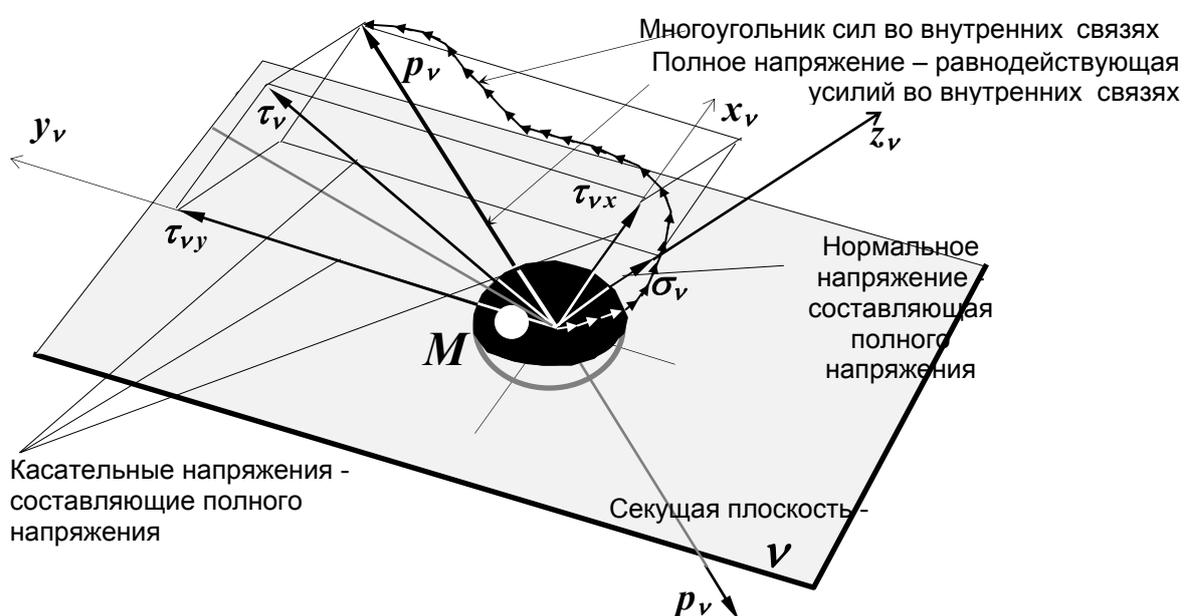


Рис. 3.1. Материальная точка M и усилия в ее связях со средой и другими точками тела

Тогда, рассматривая только одну группу сил, мы в соответствии с законами теоретической механики сможем привести их к одной равнодействующей - p_ν . Эту силу называют *полным напряжением в точке для заданной площадки ν* (плоскости). Полное напряжение (его направление и величина) определяется двумя компонентами - проекциями на два направления; нормальным к плоскости и касательным в самой плоскости. Касательные напряжения обычно раскладывают еще в плоскости в соответствии с выбранными осями. Компоненты полного напряжения называют соответственно нормальным - σ_ν и касательными -

τ_{yx} , τ_{xy} напряжениями¹. Напряжения считаются положительными, если их направления совпадают с положительным направлением осей.

С другой стороны плоскости ν (рис.3.1) действуют такие же по величине, но направленные в противоположную сторону силы - p_ν . Это автоматически вытекает из равновесия точки.

3.2. Соотношения между напряжениями на различных площадках

Прежде чем познакомиться с постановкой задачи по определению напряжений при заданной нагрузке, ответим на вопрос о том, все ли напряжения по различным площадкам являются независимыми (величина и направление полного напряжения зависит от положения плоскости ν - это очевидно). Для того чтобы на него ответить, рассмотрим равновесие точки M под действием напряжений по четырем площадкам (рис.3.2): три из них (x, y, z) взаимно перпендикулярны, а

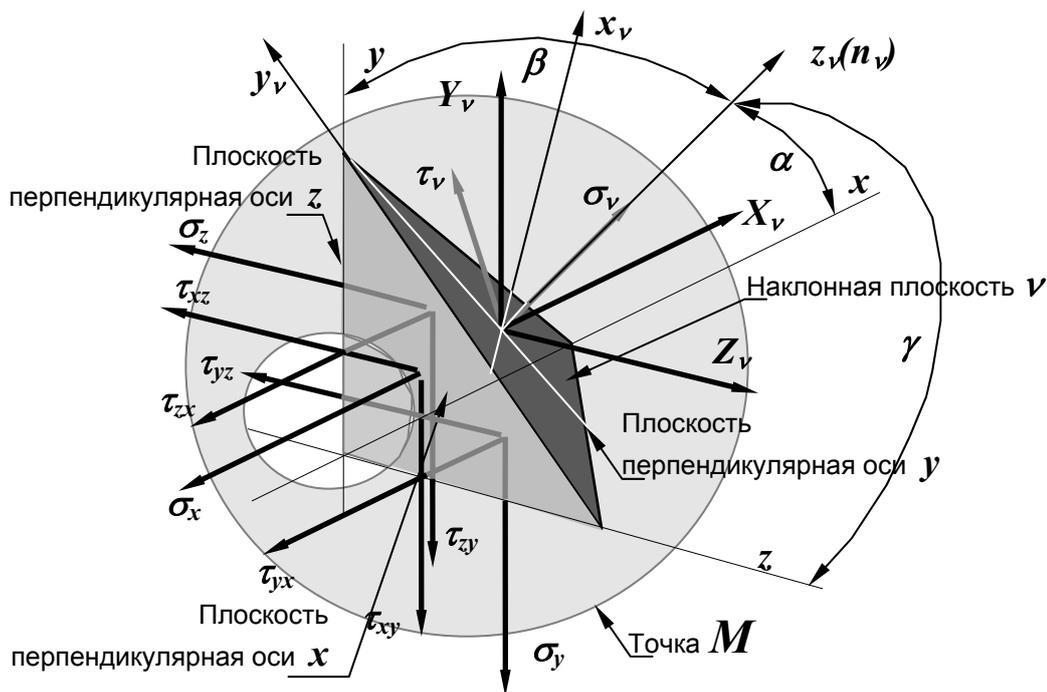


Рис. 3.2. Напряжения по трем взаимно перпендикулярным площадкам (плоскостям) и одной наклонной, проходящей через материальную точку

¹ Первый индекс при напряжениях соответствует наименованию плоскости, а второй - оси, по направлению которой они действуют (нормальные напряжения второго индекса не имеют).

четвертая - ν , имеет произвольное направление, определяемое нормалью n_ν (направляющими косинусами $l = \cos \alpha$, $m = \cos \beta$, $n = \cos \gamma$). Из условий равновесия (проекций сил на оси x , y и z) получаем

$$\left. \begin{aligned} X_\nu - \sigma_x \cdot l - \tau_{yx} \cdot m - \tau_{zx} \cdot n &= 0, \\ Y_\nu - \tau_{xy} \cdot l - \sigma_y \cdot m - \tau_{zy} \cdot n &= 0, \\ Z_\nu - \tau_{xz} \cdot l - \tau_{yz} \cdot m - \sigma_z \cdot n &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (3.1)$$

где X_ν , Y_ν , Z_ν - проекции полного напряжения на координатные оси - $p_\nu^2 = X_\nu^2 + Y_\nu^2 + Z_\nu^2$.

Из уравнений (3.1) следует, что если известны девять компонентов напряжений по трем взаимно перпендикулярным площадкам (σ_x , σ_y , σ_z , τ_{xy} , τ_{xz} , τ_{yx} , τ_{yz} , τ_{zx} , τ_{zy}), то могут быть определены напряжения по любым другим площадкам. Проецируя найденные из этих уравнений X_ν , Y_ν , Z_ν на нормаль к плоскости - ν , получаем нормальные напряжения, а касательные напряжения определим вычитанием из полного напряжения нормальных

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \sigma_x \cdot l^2 + \sigma_y \cdot m^2 + \sigma_z \cdot n^2 + \tau_{xy} \cdot l \cdot m + \tau_{yz} \cdot n \cdot m + \\ &\quad + \tau_{zx} \cdot n \cdot l + \tau_{yx} \cdot l \cdot m + \tau_{zy} \cdot m \cdot n + \tau_{xz} \cdot n \cdot l, \\ \tau_\nu^2 &= X_\nu^2 + Y_\nu^2 + Z_\nu^2 - \sigma_\nu^2. \end{aligned} \right\} \quad (3.2)$$

3.3. Главные напряжения

При заданных девяти компонентах первое уравнение (3.2) представляет собой поверхность второго порядка при изменении ориентации площадки (l , m , n). Ее называют поверхностью нормальных напряжений, или поверхностью Коши (А.Л. Cauchy, 1789-1857). Из аналитической геометрии² известно, что путем надлежащего поворота осей координат уравнение такой поверхности может быть приведено к каноническому виду. Такое уравнение не содержит произведений направляющих косинусов². Это возможно в том случае, когда касательные напряжения на взаимно перпендикулярных площадках будут равны нулю.

Координатные оси канонической системы координат обозначим цифрами 1, 2, 3

$$\sigma_\nu = \sigma_1 \cdot l^2 + \sigma_2 \cdot m^2 + \sigma_3 \cdot n^2. \quad (3.3)$$

Эти площадки называют главными, а напряжения σ_1 , σ_2 , σ_3 - главными напряжениями (рис.3.3).

² Смирнов В.И. Курс высшей математики. - М.: Наука, 1974. Т.1.

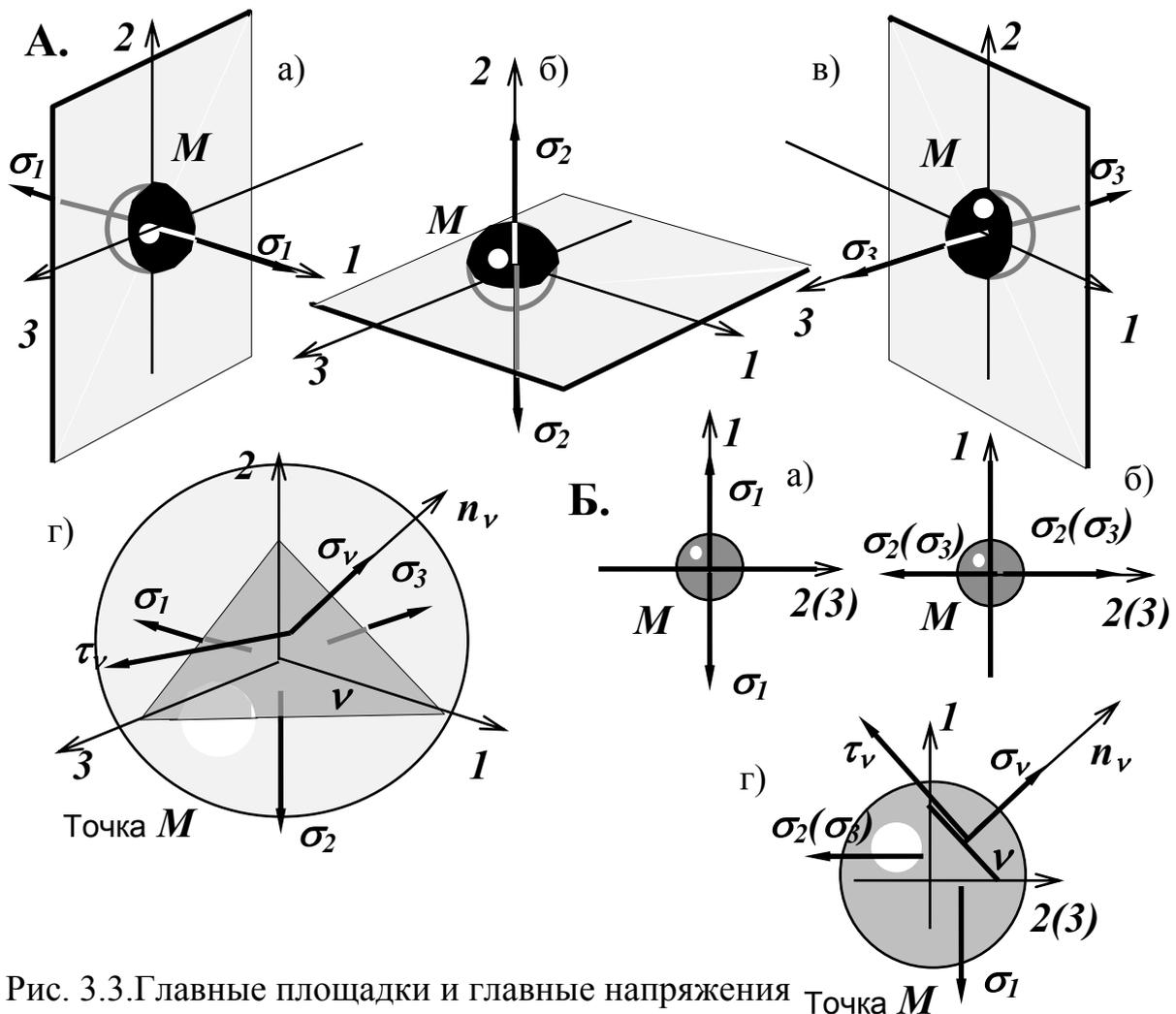


Рис. 3.3. Главные площадки и главные напряжения Точка M
 а, б, в - главные площадки (плоскости),
 г - напряжения на наклонной площадке
 А - в пространстве, Б - на плоскости

Касательные напряжения на площадке v также могут быть выражены через главные напряжения

$$\tau_v^2 = (\sigma_1 \cdot l)^2 + (\sigma_2 \cdot m)^2 + (\sigma_3 \cdot n)^2 - \sigma_v^2. \quad (3.4)$$

Изменение σ_v и τ_v в зависимости от углов наклона площадки по отношению к главным показано на графиках (рис. 3.4), построенных для случая, когда один из направляющих косинусов (например, n) равен нулю (плоская задача). Принимая во внимание, что $l^2 + m^2 = 1$, разделим все члены уравнения (3.3) на σ_1 . После простых преобразований получим

$$\frac{\sigma_v}{\sigma_1} = \left(\frac{\sigma_2}{\sigma_1} - 1 \right) \cdot m^2 + 1. \quad (3.5)$$

Нормальные напряжения σ_V на площадке V

Касательные напряжения τ_V на площадке V

Площадка V

Угол наклона

площадки V

1.0

Отношение $\sigma_2/\sigma_1 = 0.3$

σ_2

σ_1

1.0

Отношение $\sigma_2/\sigma_1 = 0.8$

Нормальные напряжения σ_V на площадке V

Касательные напряжения τ_V на площадке V

Площадка V

Угол наклона
площадки V

1.0

σ_2

σ_1

1.0

Рис. 3.4. Нормальные (тонкая линия) и касательные напряжения (жирная линия) в зависимости от наклона площадки, проходящей через точку. Напряжения отнесены к максимальному главному напряжению, минимальное главное напряжение равно нулю

Пользуясь уравнением (3.5), можно легко найти значение σ_v при заданных σ_1 и σ_2 . Напомним, что m - косинус угла между нормалью к площадке и осью 2 координат.

Аналогично из выражения (3.4) получим уравнение

$$\frac{\tau_v}{\sigma_1} = m \left(1 - \frac{\sigma_2}{\sigma_1} \right) \sqrt{1 - m^2}, \quad (3.6)$$

которое определяет касательные напряжения на любой площадке.

Графики, представленные на рисунке 3.4, показывают изменение нормального и касательного напряжений в масштабе σ_1 в зависимости от направления площадки, проходящей через заданную точку. Начало координат принято в заданной точке, через нее под углом α_1 проводится площадка v_1 (след ее на чертеже представляется лучом, выходящим из точки). Вектор, проведенный из начала координат до кривой τ в плоскости площадки, показывает величину и направление касательного напряжения, а вектор, проведенный от начала координат до кривой σ перпендикулярно площадке v_1 (перпендикулярно лучу), - величину и направление нормального напряжения. По этим графикам легко установить площадки с наибольшими напряжениями. Так, например, хорошо видно, что наибольшие касательные напряжения действуют по площадкам, расположенным под углом 45° . Их величина вычисляется по

формулам (3.4) или (3.6) ($m = \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$), а $\tau_{max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}$.

3.4. Уравнения равновесия

В уравнениях равновесия (3.1) мы не использовали три уравнения моментов относительно координатных осей. Из этих уравнений (вывод их можно найти в указанных ранее источниках) выводится **закон парности касательных напряжений**

$$\left. \begin{aligned} \tau_{xy} &= \tau_{yx}, \\ \tau_{xz} &= \tau_{zx}, \\ \tau_{yz} &= \tau_{zy}. \end{aligned} \right\} \quad (3.7)$$

С учетом (3.7) и гипотезы сплошности для каждой точки можно составить три дифференциальных уравнения равновесия (внешние гравитационные силы отсутствуют)

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\sigma_x}{dx} + \frac{d\tau_{xy}}{dy} + \frac{d\tau_{xz}}{dz} &= 0, \\ \frac{d\tau_{yx}}{dx} + \frac{d\sigma_y}{dy} + \frac{d\tau_{yz}}{dz} &= 0, \\ \frac{d\tau_{zx}}{dx} + \frac{d\tau_{zy}}{dy} + \frac{d\sigma_z}{dz} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (3.8)$$

В них входят шесть непрерывных функций напряжений, то есть задача нахождения напряжений является статически неопределимой.

3.5. Физические соотношения

Так как для определения напряжений условий равновесия недостаточно, требуются дополнительные соотношения. Одни из них выведем на основании закона Гука - правила, позволяющего от удлинений в связях перейти к усилиям в них. Такие выражения носят название физических соотношений. Для традиционных строительных материалов они получены, а для новых материалов их устанавливают экспериментально. При этом свойства материалов определяют некоторые физико-механические постоянные, которые часто называют упругими постоянными. Если каждую связь или группу связей характеризовать одной постоянной, то физических уравнений получится чрезвычайно много³. Для уменьшения количества таких соотношений примем *гипотезу однородности* материала. Она заключается в том, что свойства связей не зависят от их положения и одинаковы во всем объеме тела - сооружения⁴. С учетом этой гипотезы и свойства идеальной упругости физико-механические свойства характеризуются тремя постоянными:

E - модулем продольной (нормальной) упругости, или модулем Юнга (Т. Young, 1773-1829);

μ - коэффициентом поперечной деформации, или коэффициентом Пуассона (S.D. Poisson, 1781-1840);

G - модулем сдвига, или постоянной Ляме (G. Lamé, 1795- 1870), который для упругого изотропного тела не является независимым, а связан с **E** и **μ** соотношением

$$G = \frac{E}{2(1 + \mu)}. \quad (3.9)$$

³ Имеются теории с 81 (теория кристаллов), 36, 21 и 9 постоянными.

⁴ Если свойства связей не зависят от их направления, то такое тело называют изотропным. Если свойства связей одинаковы в каждом из трех взаимно перпендикулярных направлений - ортотропным.

При абсолютной упругости изотропного тела физические соотношения имеют вид:

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \lambda(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) + 2G\varepsilon_x, \\ \sigma_y &= \lambda(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) + 2G\varepsilon_y, \\ \sigma_z &= \lambda(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) + 2G\varepsilon_z,\end{aligned}\tag{3.10}$$

здесь $\lambda = \frac{E\mu}{(1+\mu)(1-2\mu)}$,

деформации $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$ выражают удлинения связей в направлении осей x, y, z ; а $\gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}$ - сдвиг связей в соответствующих плоскостях xy, yz и zx .

Из соотношений (3.10) получаются зависимости деформаций от напряжений:

$$\left. \begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{1}{E}(\sigma_x - \mu \cdot (\sigma_y + \sigma_z)), \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E}(\sigma_y - \mu \cdot (\sigma_x + \sigma_z)), \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E}(\sigma_z - \mu \cdot (\sigma_x + \sigma_y)), \\ \gamma_{xy} &= \frac{1}{G}\tau_{xy}, \\ \gamma_{yz} &= \frac{1}{G}\tau_{yz}, \\ \gamma_{zx} &= \frac{1}{G}\tau_{zx}.\end{aligned}\right\}\tag{3.11}$$

Таким образом, три уравнения равновесия (3.8) дополняются шестью физическими соотношениями (3.10), но в них входят дополнительно и шесть деформаций. Чтобы привести в соответствие количество уравнений и неизвестных, добавим еще геометрические зависимости деформаций и перемещений.

3.6. Геометрические уравнения

Перемещение точки определяется тремя составляющими u_x , u_y , u_z - линейными смещениями вдоль осей координат (рис.3.5). Деформации и перемещения связаны соотношениями, которые относительно просто получаются из геометрических соображений (рис. 3.5, 3.6)

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u_x}{\partial x}, & \gamma_{xy} &= \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x}, \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial u_y}{\partial y}, & \gamma_{yz} &= \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y}, \\ \varepsilon_z &= \frac{\partial u_z}{\partial z}, & \gamma_{zx} &= \frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial z}. \end{aligned} \right\} \quad (3.12)$$

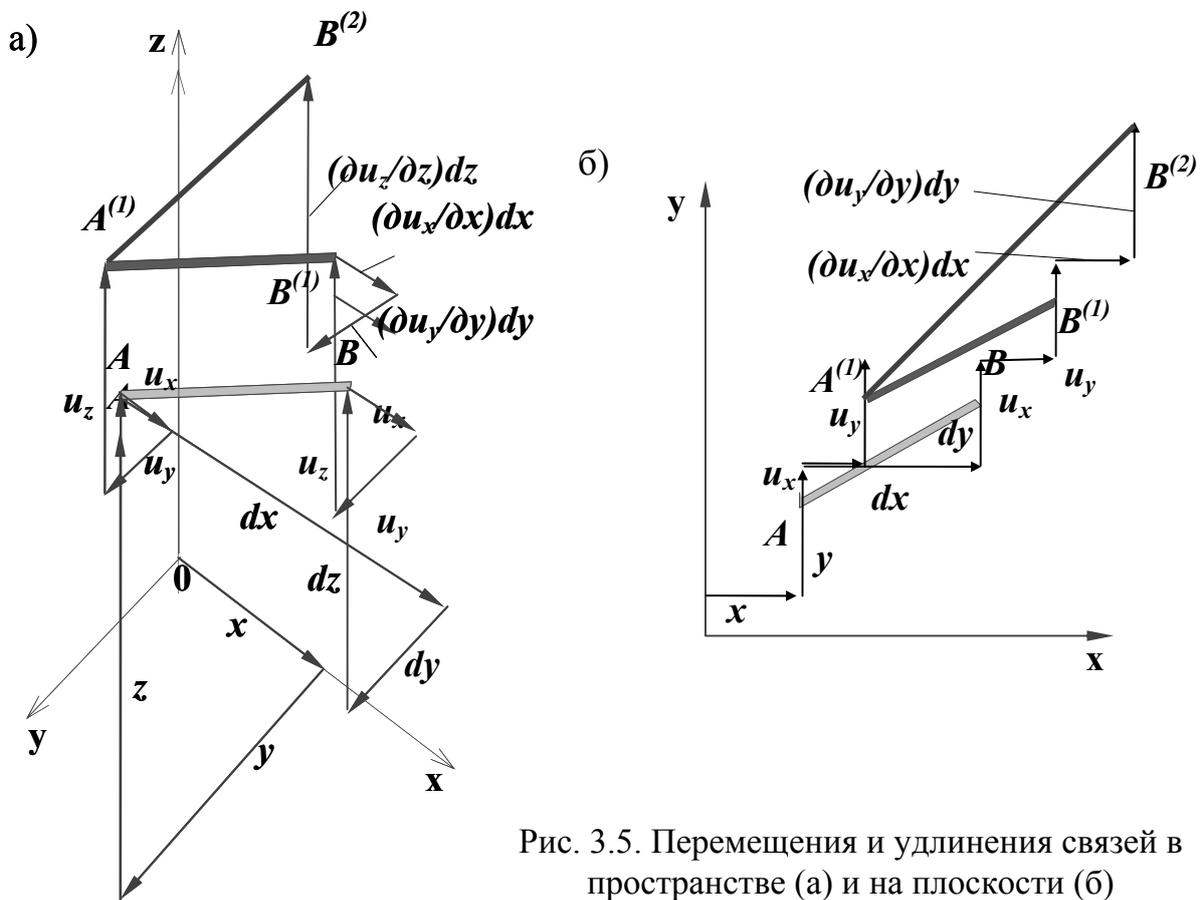


Рис. 3.5. Перемещения и удлинения связей в пространстве (а) и на плоскости (б)

В пятнадцати полученных соотношениях (уравнений равновесия (3.8) - три, геометрических уравнений (3.12) - шесть, физических (3.10) - шесть) содержится пятнадцать неизвестных (шесть компонентов напряжений, шесть компонентов деформаций и три компонента перемещений). Они составляют полную систему. В математической

теории упругости доказывается, что такая система имеет единственное решение⁵. Однако математические трудности совместного решения этих уравнений до сих пор полностью не разрешимы.

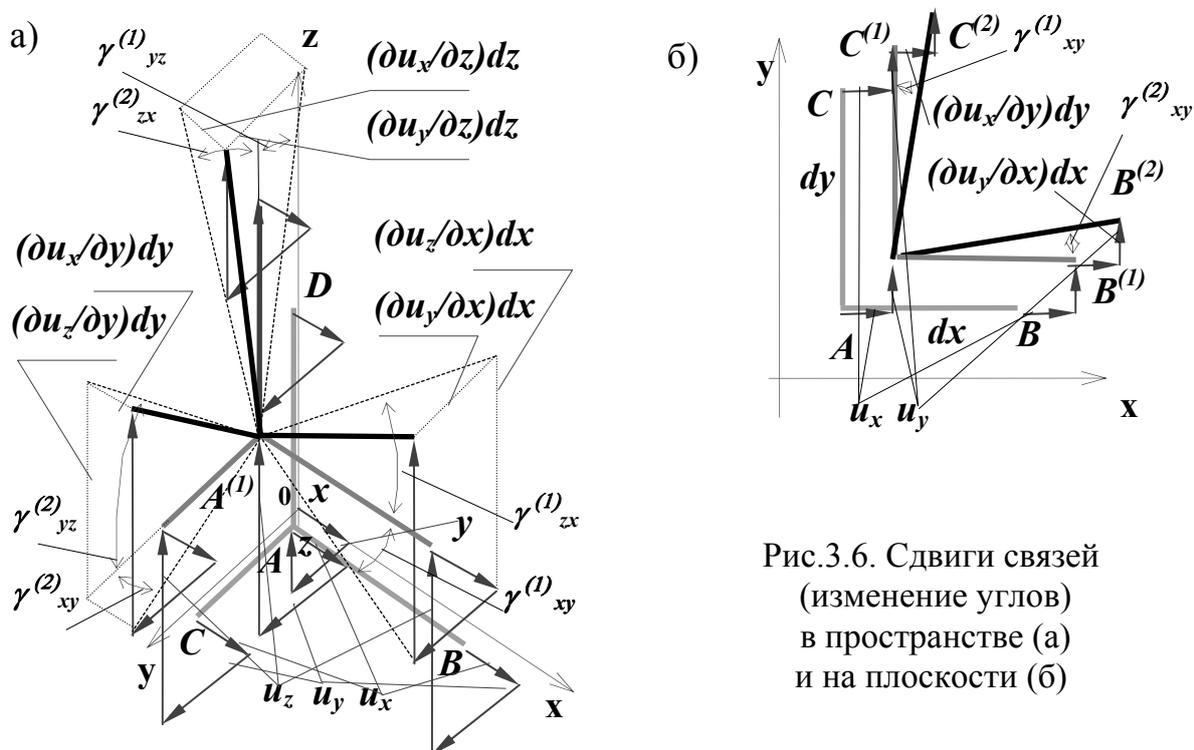


Рис.3.6. Сдвиги связей (изменение углов) в пространстве (а) и на плоскости (б)

Имеется небольшое количество решенных частных задач, но требованиям практики они удовлетворить не могут. Тем не менее приведенные рассуждения полезны, так как дают возможность понять физическую и математическую постановку задачи и перейти в дальнейшем к построению инженерных методов определения напряжений и основанных на них критериев прочности.

⁵ Филин А.П. Прикладная механика твёрдого деформированного тела. - М.: Наука, 1975. Т.1