

# ИНЖЕНЕРНЫЕ МЕТОДЫ ОПРЕДЕЛЕНИЯ НАПРЯЖЕНИЙ. ВНУТРЕННИЕ УСИЛИЯ

## 4.1. Геометрические допущения инженерных методов

Для решения задачи оценки прочности (подробно мы будем говорить об этом в шестой главе) достаточно знать либо напряжения в связях, либо их деформации. Однако как видно из выражений (3.8), (3.10), (3.12), ни одна из этих групп уравнений (уравнения статики, геометрические и физические зависимости) отдельно не решается. Решение в окончательном виде на основе имеющихся математических методов получено только для ограниченного круга задач. Эти задачи рассматриваются в теории упругости. В практике проектирования большинства строительных конструкций обычно используют более простые инженерные методы определения напряжений. Из множества сооружений мы будем рассматривать только те, к которым эти методы применимы.

Инженерные методы оценки напряженно деформированного состояния основаны на геометрических допущениях (гипотезах). Вводимые гипотезы позволяют получить описание состояния бесконечного количества внутренних связей через конечное число параметров. Эти гипотезы зависят от соотношения размеров элементов сооружения.

Если какой-либо размер элемента мал по сравнению с двумя другими, как, например, в плитах, оболочках, складках, мембранах, то с большой достоверностью можно считать, что в направлении малого размера связи деформируются по линейному закону. Поэтому для тонкостенных конструкций в направлении малого размера принимается гипотеза Кирхгофа - Лява (G.R. Kirchhoff, 1824-1887, А.Е.Н. Love, 1863-1940) о прямой недеформированной нормали: *нормаль, перпендикулярная к срединной поверхности, остается перпендикулярной к ней в деформированном состоянии и не изменяет своей длины.*

Если элементы имеют два малых размера по сравнению с третьим - это нити, стержни, то используется допущение Сен-Венана (A.G.K. Barre de Saint-Venant, 1797-1886) в направлении двух малых размеров. Оно заключается в том, что *сечения плоские и перпендикулярные к оси до деформации стержня остаются плоскими и перпендикулярными к оси после его деформации и не изменяют своей формы.*

Когда размеры элементов сооружения во всех направлениях одинакового порядка (такие элементы называются массивами),

геометрические гипотезы ввести затруднительно. Поэтому для таких сооружений инженерный метод не применим.

Приняв геометрические допущения, мы получаем возможность в теории тонкостенных конструкций положение всех связей определять через характеристики срединной поверхности, а в теории стержней - через характеристики оси. Гипотеза прямой недеформированной нормали позволяет деформированное ее положение определить пятью параметрами: тремя линейными ( $x_1, x_2, x_3$ ) и двумя угловыми ( $x_4, x_5$ ) (рис. 4.1). Таким образом, чтобы установить положение всех связей, достаточно знать всего пять параметров, что аналогично замене бесконечного количества микросвязей между материальными точками пятью макросвязями.

Гипотеза плоских недеформируемых сечений дает возможность определить положение сечения в деформированном состоянии стержня шестью параметрами: тремя координатами ( $x_1, x_2, x_3$ ) и тремя углами поворота ( $x_4, x_5, x_6$ ) (рис. 4.2), то есть, бесконечное количество микросвязей заменить шестью макросвязями. Если деформация стержня происходит в одной плоскости, то остается всего три параметра (три макросвязи), указывающих положение всех связей в сечении (две линейных и одна угловая).

При построении методов расчета вводится еще одно допущение геометрического характера - о малости перемещений, которое дает возможность в уравнениях статики использовать геометрические параметры (расстояния, углы), взятые в недеформированном состоянии.

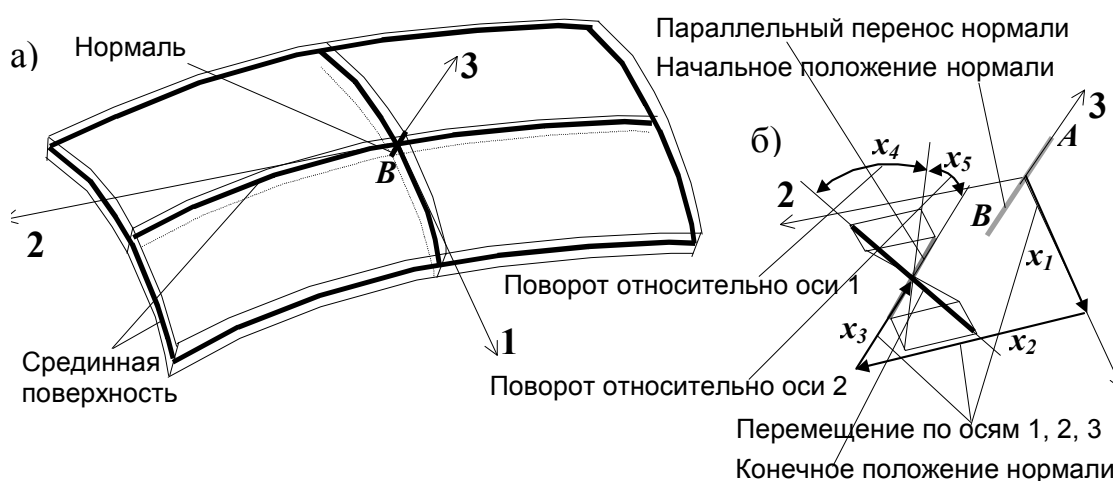


Рис. 4.1. Элемент тонкостенной конструкции (а) и перемещение нормали к срединной поверхности (б)

На основе перечисленных гипотез построены методы, позволяющие для большой группы сооружений определять внутренние усилия только из уравнений статики. Такие сооружения принято называть *статически определимыми*. Ниже показана методика использования статического способа на примерах плоских стержневых систем.

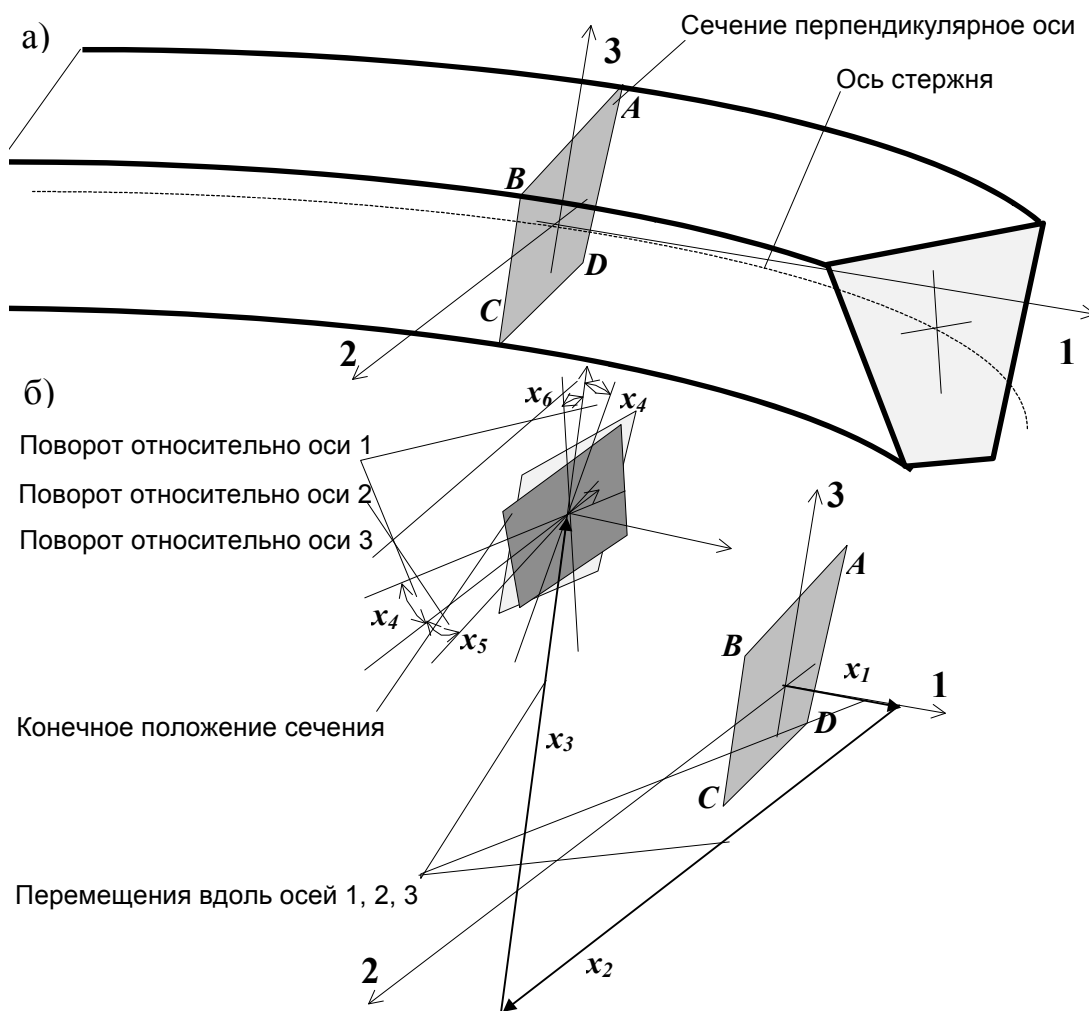


Рис. 4.2. Элемент стержня (а) и перемещение плоского сечения (б)

## 4.2. Внутренние усилия

Рассмотрим различные виды деформации прямолинейного стержня. Теория плоских сечений постулирует отсутствие давления продольных волокон друг на друга, т. е. отсутствие нормальных связей между волокнами (существуют только касательные связи), поэтому будем рассматривать стержень как множество несвязных волокон, параллельных оси.

При рассмотрении любой деформации декартовы координатные оси будем располагать так, чтобы ось  $z$  совпадала с осью стержня, а оси  $x$  и  $y$  располагались в плоскости сечения стержня перпендикулярно его оси по направлениям осей симметрии сечения, если они имеются.

#### 4.2.1. Осевое растяжение

Рассмотрим стержень прямоугольного сечения, верхняя грань которого закреплена, а к нижней грани точно по центру сечения подвешен груз (рис.4.3). Действие груза приведет к тому, что внутренние связи начнут растягиваться (удлиняться) вдоль оси стержня  $z$ . Так как сечение плоское до деформации должно оставаться плоским, и после деформации и не должно менять свою форму, расстояние между двумя соседними сечениями  $l$  увеличится на величину  $\Delta l$  (рис.4.3), настолько же удлинятся и связи. Во всех других направлениях деформации отсутствуют, то есть.

$$\varepsilon_z = \Delta l / l,$$

$$\varepsilon_x = \varepsilon_y = 0,$$

$$\gamma_{xy} = \gamma_{xz} = \gamma_{zy} = 0.$$

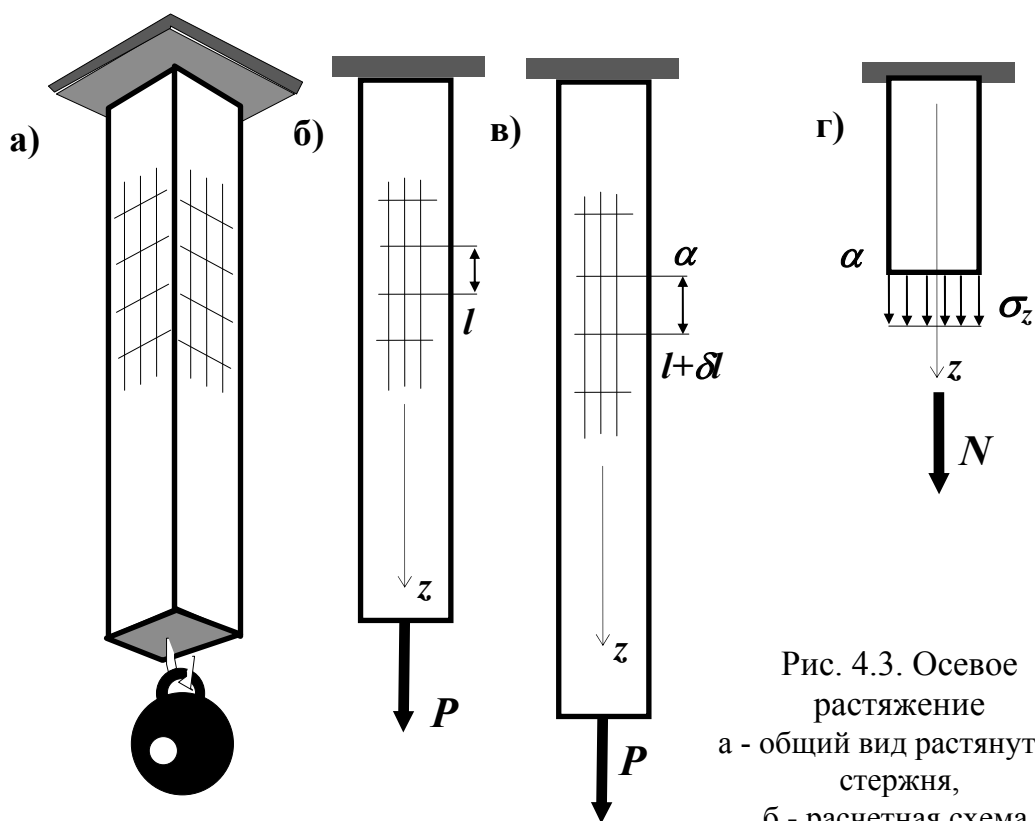


Рис. 4.3. Осевое растяжение  
 а - общий вид растянутого стержня,  
 б - расчетная схема,  
 в - схема удлинения,  
 г - напряжения ( $\sigma_z$ ) и усилие ( $N$ ) в сечении

Разделим стержень сечением  $\alpha$  на две части и рассмотрим одну из них, например, верхнюю. Придерживаясь правил принятой нами концепции сил, разорванные при этом связи необходимо заменить возникающими в них усилиями - напряжениями. По соотношению (3.10) эти напряжения будут равны

$$\sigma_z = E \cdot \varepsilon_z, \quad \sigma_x = \sigma_y = \tau_{xy} = \tau_{xz} = \tau_{zy} = 0.$$

(рис.4.3). Так как деформации одинаковы, то и напряжения по сечению будут распределены равномерно, то есть  $\sigma_z = \text{const}$ . Следовательно, равнодействующая  $N$  напряжений  $\sigma_z$  должна быть приложена в центре тяжести сечения и направлена вдоль оси стержня. Эта равнодействующая называется *продольной силой* и значение ее равно

$$N = \int_A \sigma_z dA = \sigma_z \cdot \int_A dA = \sigma_z \cdot A, \quad (4.1)$$

(здесь  $A$  - площадь поперечного сечения стержня).

Знак продольной силы определяется знаком  $\sigma_z$  (продольная сила положительна, если она растягивает стержень, и отрицательна, если его сжимает).

#### 4.2.2. Чистый изгиб

Чистый изгиб будет иметь место, если к горизонтально расположенному стержню подвесить на одинаковом расстоянии от опор два одинаковых груза, как показано на рисунке 4.4. а)

При такой деформации продольные волокна стержня будут искривляться по дуге окружности, поперечные сечения, плоские до деформации, останутся плоскими и перпендикулярными оси после деформации, но повернутся на некоторый угол  $\varphi$ . Длина осевых (нейтральных) волокон не изменится, нижние волокна удлинятся, а верхние укоротятся (рис.4.4). Как и при осевом растяжении, будут только продольные деформации связей. Если, учитывая гипотезу о малости перемещений, закон изменения деформаций по высоте сечения считать линейным, то относительное удлинение каждой связи будет зависеть от расстояния между нейтральным волокном и этой связью  $y$  и от изменения кривизны стержня в рассматриваемом сечении  $\kappa = \varphi/l$ .

Таким образом,

$$\varepsilon_z = \Delta l/l = \kappa y, \quad \varepsilon_x = \varepsilon_y = 0, \quad \gamma_{xy} = \gamma_{xz} = \gamma_{zy} = 0.$$

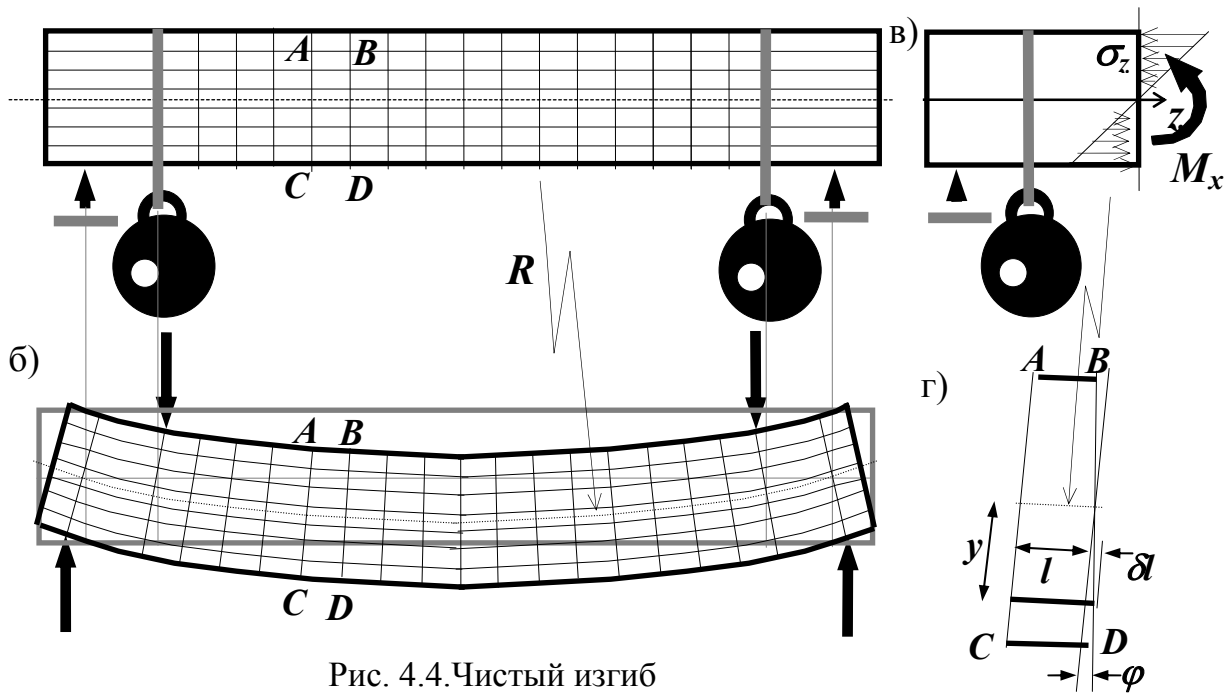


Рис. 4.4. Чистый изгиб

а - схема нагружения, б - схема изгиба, в - напряжения ( $\sigma_z$ ) и усилия ( $M_x$ ), г - элемент  $ABCD$

Если разделить стержень любым произвольным сечением на две части и заменить разорванные связи усилиями в них (напряжениями) (рис.4.4, г), то на основании соотношения (3.10)

$$\sigma_z = E \cdot \varepsilon_z = E \cdot \kappa \cdot y, \quad \sigma_x = \sigma_y = \tau_{xy} = \tau_{xz} = \tau_{zy}. \quad (4.2)$$

Нормальные напряжения  $\sigma$  приводятся к паре сил с моментом

$$M_x = \int_A \sigma_z \cdot y dA, \quad (4.3)$$

который называется *изгибающим моментом* относительно оси  $x$ .

Подставляя соотношения (4.2) в (4.3), получим

$$M_x = \int_A E \cdot \kappa \cdot y^2 \cdot dA = E \cdot \kappa \int_A y^2 dA.$$

$\int_A y^2 dA = I_x$  представляет собой геометрическую характеристику сечения стержня и называется *моментом инерции* сечения относительно оси  $x$ . С учетом этого обозначения будем иметь

$$M_x = E \cdot \kappa \cdot I_x. \quad (4.4)$$

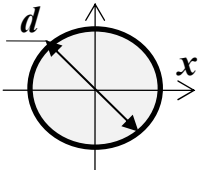
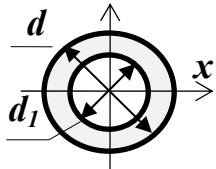
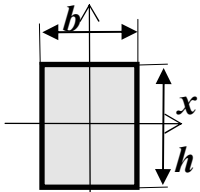
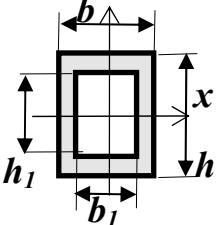
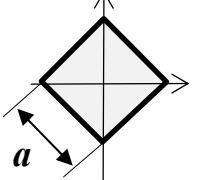
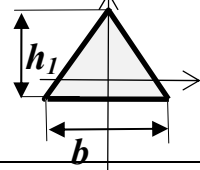
Знак момента определяется знаком координаты  $y$  и напряжения  $\sigma_z$  и совпадает со знаком кривизны. Из соотношения (4.2):  $\kappa = \sigma_z / (E \cdot y)$ . Подставляя это выражение в (4.4), получим формулу, связывающую изгибающий момент с напряжениями в сечениях

$$M_x = \sigma_z \cdot I / y. \quad (4.5)$$

Геометрические характеристики часто встречающихся сечений приведены в таблице 4.1, а прокатных профилей - в таблицах 4.2 и 4.3.

Таблица 4.1.

Характеристики сечений

Сечение	Площадь- $A$	Момент инерции - $I_x$	Момент сопротивления, $W=I_x/y_{max}$	Радиус инерции, $i_x = \sqrt{I_x / A}$
	$\frac{\pi \cdot d^2}{4}$	$\frac{\pi d^4}{64} = 0.05d^4$	$\frac{\pi d^3}{32} = 0.1d^3$	$\frac{d}{4}$
	$\frac{\pi(d^2 - d_1^2)}{4}$	$\frac{\pi(d^4 - d_1^4)}{64}$	$\frac{\pi(d^4 - d_1^4)}{32d}$	$\frac{\sqrt{d^2 + d_1^2}}{4}$
	$b \cdot h$	$\frac{b \cdot h^3}{12}$	$\frac{b \cdot h^2}{6}$	$\frac{h}{\sqrt{12}}$
	$b \cdot h - b_1 h_1$	$\frac{bh^3 - b_1 h_1^3}{12}$	$\frac{bh^3 - b_1 h_1^3}{6h}$	$\sqrt{\frac{bh^3 - b_1 h_1^3}{12(bh - b_1 h_1)}}$
	$a^2$	$\frac{a^4}{12}$	$\frac{a^3 \sqrt{2}}{12}$	$\frac{a}{\sqrt{12}}$
	$\frac{bh}{2}$	$\frac{bh^3}{36}$	$\frac{bh^2}{24}$	$\frac{h}{\sqrt{18}}$

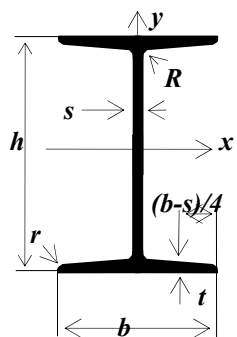


Таблица 4.2.  
Двутавры стальные горячекатаные.  
**СОРТАМЕНТ**  
ГОСТ 8239-89

Номер профиля	Размеры в мм (см. рисунок)						Площадь сечения,  см <sup>2</sup>	Масса одного метра,  кг	Момент инерции сечения относи- тельно оси x,  см <sup>4</sup>	Момент сопро- тивления относи- тельно оси x,  см <sup>3</sup>	Радиус инерции относи- тельно оси x,  см	Статичес- кий момент полусече- ния отно- сительно оси x,  см <sup>3</sup>	Момент инерции сечения относи- тельно оси y,  см <sup>4</sup>	Момент сопротив- ления относи- тельно оси y,  см <sup>3</sup>	Радиус инерции относи- тельно оси y,  см
	<i>h</i>	<i>b</i>	<i>s</i>	<i>t</i>	<i>R</i>	<i>r</i>									
10	100	55	4,5	7,2	7,0	2,5	12,0	9,46	198	39,7	4,06	23,0	17,9	6,49	1,22
12	120	64	4,8	7,3	7,5	3,0	14,7	11,5	350	58,4	4,88	33,7	27,9	8,72	1,38
14	140	73	4,9	7,5	8,0	3,0	17,4	13,7	572	81,7	5,73	46,8	41,9	11,5	1,55
16	160	81	5,0	7,8	8,5	3,5	20,2	15,9	673	109	6,57	62,3	58,6	14,5	1,70
18	180	90	5,1	8,1	9,0	3,5	23,4	18,4	1290	143	7,42	81,4	82,6	18,4	1,88
20	200	100	5,2	8,4	9,5	4,0	26,8	21,0	1840	184	8,28	104	115	23,1	2,07
22	220	110	5,4	8,7	10,0	4,0	30,6	24,0	2550	232	9,13	131	157	28,6	2,27
24	240	115	5,6	9,5	10,5	4,0	34,8	27,3	3460	289	9,97	163	198	34,2	2,37
27	270	125	6,0	9,8	11,0	4,5	40,2	31,5	5010	371	11,2	210	260	41,5	2,54
30	300	135	6,5	10,2	12,0	5,0	46,5	36,5	7080	472	12,3	260	337	49,9	2,69
33	330	140	7,0	11,2	13,0	5,0	53,8	42,2	9840	597	13,5	339	419	59,9	2,79
36	360	145	7,5	12,3	14,0	6,0	61,9	48,6	13380	743	14,7	423	516	71,1	2,89
40	400	155	8,3	13,0	15,0	6,0	72,6	57,0	19062	953	16,2	545	567	86,1	3,03
45	450	160	9,0	14,2	16,0	7,0	84,7	66,5	27696	1231	18,1	708	808	101	3,09
50	500	170	10,0	15,2	17,0	7,0	100,0	78,5	39727	1589	19,9	919	1043	123	3,23
55	550	180	11,0	16,5	18,0	7,0	118,0	92,6	55962	2035	21,8	1181	1356	151	3,39
60	600	190	12,0	17,8	20,0	8,0	138,0	108,0	76806	2560	23,6	1491	1725	182	3,54



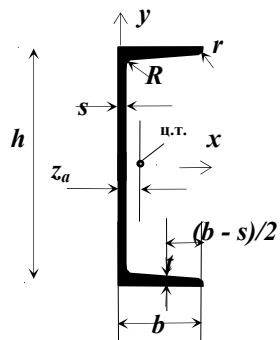


Таблица 4.3.

Швеллеры стальные горячекатаные.

СОРТАМЕНТ

ГОСТ 8240-89

Номер профиля	Размеры в мм (см. рисунок)							Площадь сечения,  см <sup>2</sup>	Масса одного метра,  кг	Момент инерции сечения относительно оси x,  см <sup>4</sup>	Момент сопротивления относительно оси x,  см <sup>3</sup>	Радиус инерции относительно оси x,  см	Статический момент полусечения относительно оси x,  см <sup>3</sup>	Момент инерции сечения относительно оси y,  см <sup>4</sup>	Момент сопротивления относительно оси y,  см <sup>3</sup>	Радиус инерции относительно оси y,  см
	<i>h</i>	<i>b</i>	<i>s</i>	<i>t</i>	<i>R</i>	<i>r</i>	<i>z<sub>a</sub></i>									
5	50	32	4.4	7.0	6	2.5	1.16	6.16	4.84	22.8	9.1	1.92	5.59	5.61	2.75	0.95
6.5	65	36	4.4	7.2	6	2.5	1.24	7.51	5.90	48.6	15.0	2.54	9.00	8.70	3.68	1.08
8	80	40	4.5	7.4	6.5	2.5	1.31	8.98	7.05	89.4	22.4	3.16	23.3	12.8	4.75	1.19
10	100	46	4.5	7.6	7	3.0	1.44	10.9	8.59	174	34.8	3.99	20.4	20.4	6.46	1.37
12	120	52	4.8	7.8	7.5	3.0	1.54	13.3	10.4	304	50.6	4.78	29.6	31.2	8.52	1.53
14	140	58	4.9	8.1	8	3.0	1.67	15.6	12.3	491	70.2	5.60	40.8	45.4	11.0	1.70
16	160	64	5.0	8.4	8.5	3.5	1.80	18.1	14.2	747	93.4	6.42	54.1	63.3	13.8	1.87
16а	160	68	5.0	9.0	8.5	3.5	2.00	19.5	15.3	823	103	6.49	59.4	78.8	16.4	2.01
18	180	70	5.1	8.7	9	3.5	1.94	20.7	16.3	1090	121	7.24	69.8	86.0	17.0	2.04
18а	180	74	5.1	9.3	9	3.5	2.13	22.2	17.4	1190	132	7.32	76.1	105	20.0	2.18
20	200	76	5.2	9.0	9.5	4.0	2.07	23.4	18.4	1520	152	8.07	87.8	113	20.5	2.20
22	220	82	5.4	9.5	10	4.0	2.21	26.7	21.0	2110	192	8.89	110	151	25.1	2.37
24	240	90	5.6	10.0	10.5	4.0	2.42	30.6	24.0	2900	242	9.73	139	208	31.6	2.60
27	270	95	6.0	10.5	11	4.5	2.47	35.2	27.7	4160	308	10.9	178	262	37.3	2.73
30	300	100	6.5	11.0	12	5.0	2.52	40.5	31.8	5810	387	12.0	224	327	43.6	2.84
33	330	105	7.0	11.7	13	5.0	2.59	46.5	36.5	7980	484	13.1	281	410	51.8	2.97
36	360	110	7.5	12.6	14	6.0	2.68	53.4	41.9	10820	601	14.2	350	513	61.7	3.10
40	400	115	8.0	13.5	15	6.0	2.75	61.5	48.3	15220	761	15.7	444	642	73.4	3.23

### 4.2.3. Сдвиг (срез)

Деформацию сдвига (среза) можно наблюдать на оси грузового устройства (рис.4.5). Приложенная к крюку нагрузка будет стремиться опустить его вниз, перерезая при этом ось, поддерживающую крюк, по сечению  $AC$ , совпадающему с боковой гранью крюка. Сдвигу (срезу) волокон стержня по этому сечению будут препятствовать внутренние связи, но при этом в них появятся деформации  $\Delta$ , которые принято определять через угол сдвига (рис. 4.5). В соответствии с гипотезой плоских сечений деформация сдвига для всех связей в сечении  $AC$  одинакова, а вследствие малости перемещений

$$\gamma = \operatorname{tg} \gamma = \Delta / l.$$

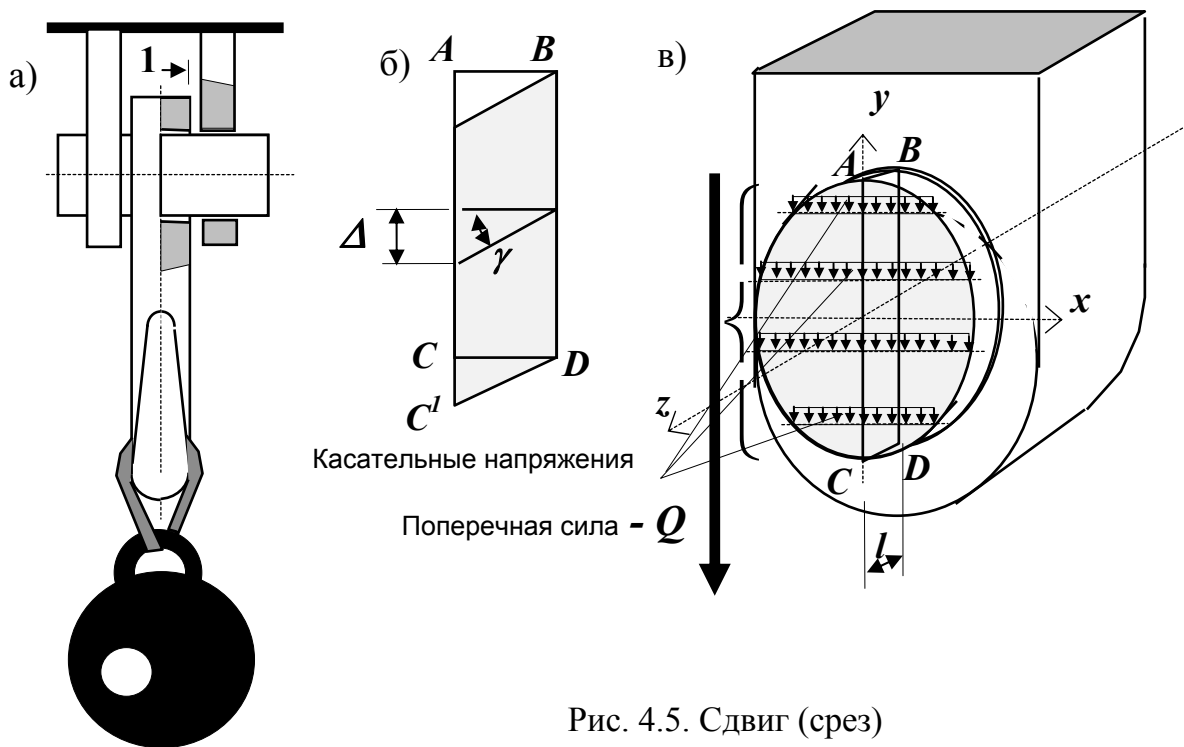


Рис. 4.5. Сдвиг (срез)

а - схема среза втулки подъемного устройства крана,  
 б - деформация сдвига элемента  $ABCD$ ,  
 в - напряжения и усилие в сечении 1

Все остальные деформации связей в сечении отсутствуют, то есть

$$\varepsilon_z = \varepsilon_x = \varepsilon_y = 0, \quad \gamma_{zx} = \gamma_{yx} = 0.$$

Если в плоскости среза разрезанные связи заменить напряжениями (рис.4.5), то в соответствии с физическими соотношениями (3.10)

$$\sigma_z = \sigma_x = \sigma_y = 0, \quad \tau_{zy} = G \cdot \gamma, \quad \tau_{zx} = \tau_{xy} = 0. \quad (4.6)$$

Равнодействующая касательных напряжений в данном случае называется *поперечной силой* при сдвиге. С учетом равномерного распределения  $\tau_{zy}$  по сечению ее значение будет равно

$$Q_{c \text{ д.в.}} = \int_A \tau_{zy} \cdot dA = \tau_{zy} \cdot A. \quad (4.7)$$

Знак поперечной силы определяется знаком касательных напряжений

#### 4.2.4. Кручение круглого стержня

Деформация кручения характерна для работы валов. Примером вала является прямолинейный стержень круглого сечения, один конец его закреплен неподвижно, а к другому крепится устройство, через которое передается нагрузка, стремящаяся повернуть вал вокруг его оси (рис.4.6).

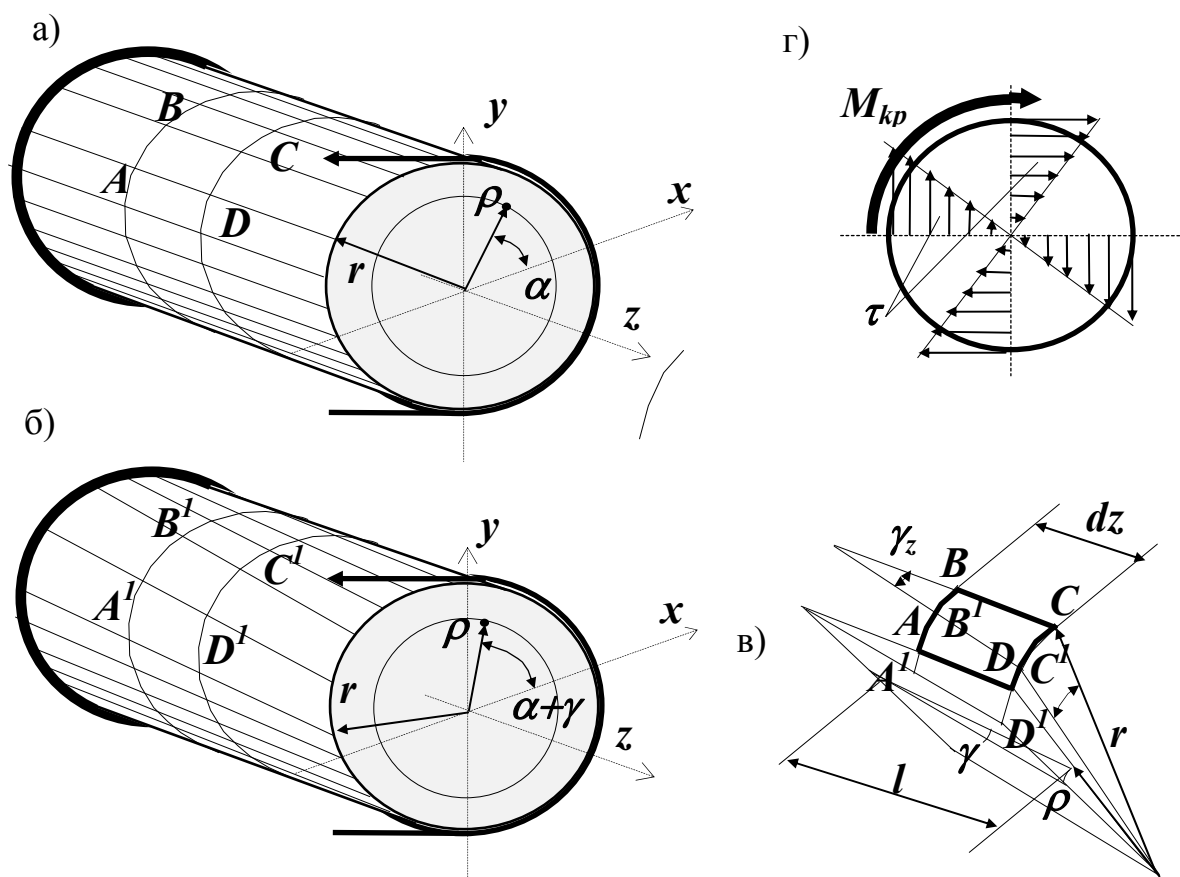


Рис. 4.6. Кручение  
 а -общий вид стержня, б - схема скручивания,  
 в - деформация элемента *ABCD*,  
 г - касательные напряжения ( $\tau$ ) и усилие - крутящий момент ( $M_{кр}$ )

При этом в стержне продольные деформации отсутствуют, то есть

$$\varepsilon_x = \varepsilon_y = \varepsilon_z = 0,$$

а в плоскости  $xoy$  происходит сдвиг (поворот) одного сечения относительно другого (рис.4.6). Угол сдвига для каждого сечения  $\gamma$  и, следовательно, удлинение радиальных волокон  $\Delta l$  определяются общим углом закручивания стержня  $\gamma$  (рис.4.6). Рассматривая элементарный участок вала (рис.4.6), из простых геометрических соображений с учетом малости угла закручивания, легко установить, что  $\tan \gamma = \gamma = \Delta l = r \cdot d\gamma_r / dz$ . Величина  $d\gamma_r / dz$  - относительный угол закручивания - имеет размерность  $m^{-1}$  и обозначается обычно  $\theta$ .

По соотношению (3.10) с учетом относительного угла закручивания напряжения в крайних волокнах (рис.4.6)

$$\tau_r = G \cdot \theta \cdot r,$$

а в произвольном сечении на расстоянии  $\rho$  от центра сечения

$$\tau_\rho = G \cdot \theta \cdot \rho. \quad (4.8)$$

С учетом характера распределения эти напряжения называются радиальными. Они приводятся к паре (рис. 4.6, г), называемой *крутящим моментом*, который определяется по формуле

$$M_{кр.} = \int_A \tau \cdot \rho \cdot dA = \int_A G \cdot \theta \cdot \rho^2 \cdot dA = G \cdot \theta \int_A \rho^2 dA..$$

Величину  $\int_A \rho^2 dA$  называют *полярным моментом инерции*

сечения и обычно обозначают через  $I_\rho$ , тогда

$$M_{кр.} = G \cdot \theta \cdot I_\rho \quad (4.9)$$

или с учетом соотношения (4.8)

$$M_{кр.} = \frac{\tau \cdot I_\rho}{\rho}. \quad (4.10)$$

#### 4.2.5. Поперечный изгиб

В отличие от чистого изгиба при поперечном изгибе стержня (рис.4.7) происходит не только удлинение и укорочение составляющих его волокон, но и сдвиг этих волокон относительно друг друга. Поэтому сечение разворачивается по отношению к продольной оси и искривляется (депланирует), перестает быть плоским. Гипотеза плоских сечений позволила во всех рассмотренных выше случаях получить зависимости между деформациями и напряжениями на основе простых геометрических соображений, в данном случае она оказывается

неприемлемой. Дмитрий Иванович Журавский (1821-1891) предложил оригинальный выход из этого положения. Он ввел предположение, что депланация<sup>1</sup> сечений при поперечном изгибе не оказывает влияния на нормальные напряжения в поперечных сечениях стержня, то есть, как и при чистом изгибе

$$\sigma_z = \frac{M_x \cdot y}{I_x}, \quad (4.11)$$

а сказывается только на величине и распределении по сечению касательных напряжений  $\tau$ . По Д.И. Журавскому

$$Q_y = \frac{\tau \cdot b \cdot I_x}{S}, \quad (4.12)$$

где  $b$  - ширина сечения в уровне действия напряжения  $\tau$ ,  $S$  - статический момент площади выше (ниже) этого уровня относительно центра тяжести сечения<sup>2</sup>.

<sup>1</sup> Депланация – (лат. deplanum – не плоскость) – искривление плоского сечения.

<sup>2</sup> Познакомим читателя с решением Д.И. Журавского.

Вырежем из стержня элемент (рис.4.7) он принял изменяющимися так же, как и при чистом изгибе, т. е.  $\varepsilon = \kappa y$ . Поэтому и распределение нормальных напряжений по высоте сечения будет таким же, как и при чистом изгибе  $\sigma = E \cdot \varepsilon = E \cdot \kappa y$ . Ввиду того что при поперечном изгибе кривизна  $\kappa$  изменяется по длине стержня, напряжения по грани  $ab$  (сечение 2-2), которые обозначим  $\sigma_{z2}$ , будут отличаться от напряжений по грани  $cd$  (сечение 1-1) -  $\sigma_{z1}$ . Касательные напряжения действуют по граням  $ab$  и  $cd$  -  $\tau_{zy}$  и грани  $bc$  -  $\tau_{yz}$ . Ввиду парности касательных напряжений  $\tau_{yz} = \tau_{zy} = \tau$ .

Спроецируем все силы, действующие на выделенный элемент, на продольную ось стержня-  $z$ . Из условия равновесия элемента эта проекция равна нулю.

$$\int_A \sigma_{z1} dA - \int_A \sigma_{z2} dA + \tau_{yz} \cdot b dz = 0,$$

где  $A$  - площадь грани  $ab$  и  $cd$ .

Так как изгибающие моменты в сечениях 2-2 и 1-1 отличаются и, соответственно, равны  $M$  и  $M + dM$ , то по (4.11) получим

$$\int_A \frac{M \cdot y}{I} dA + \int_A \frac{(M + dM)}{I} dA + \tau_{yz} \cdot b dz = 0 \quad \text{или} \quad \int_A (M - M - dM) \frac{y}{I} dA + \tau_{yz} b dz = 0.$$

Откуда  $\tau_{yz} = \frac{dM}{dz} \frac{\int y \cdot dA}{b \cdot I}$ . Обозначим через  $S = \int_A y \cdot dA$  - статический момент

площади грани  $ab$  (или  $cd$ ) относительно нейтральной оси  $x$ . Заметим также, что  $Q = \frac{dM}{dz}$ . Поэтому  $\tau_{yz} = \frac{Q \cdot S}{I \cdot b}$ . Это соотношение носит название *формулы Журавского*.

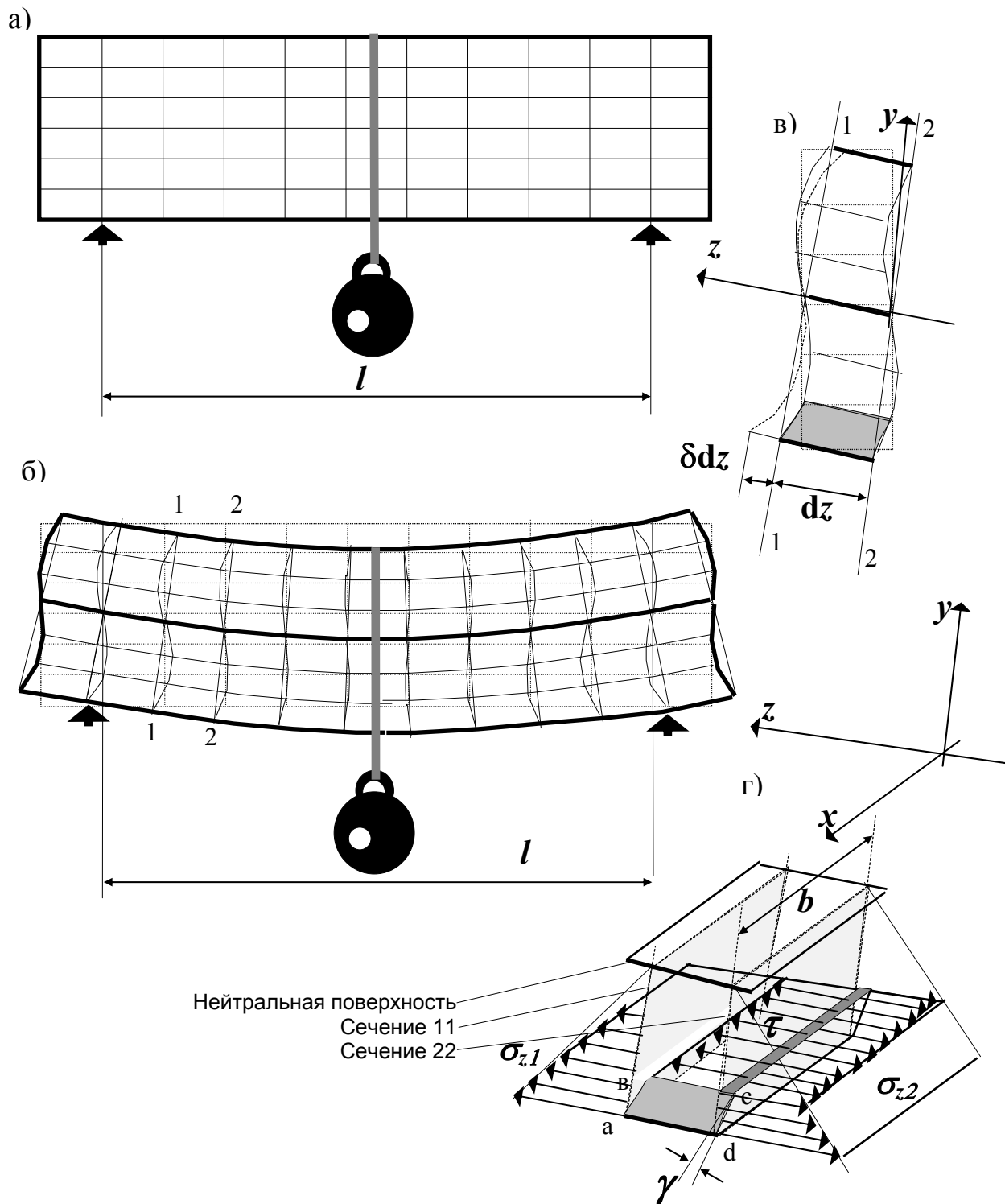


Рис. 4.7. Поперечный изгиб  
 а - общий вид стержня,  
 б - схема его изгибания,  
 в - деформация элемента 1122,  
 г - напряжения по граням параллелепипеда с основанием авсд

Равнодействующие напряжений в сечении - продольная сила  $N$ , моменты (изгибающие  $M_x$ ,  $M_y$  и крутящий момент  $M_z$ ) и поперечная сила ( $Q_x$  или  $Q_y$ ) называются внутренними усилиями и представляют собой интегральные (суммарные) характеристики напряжений.

Для всех остальных видов деформации внутренние усилия можно получить на основе выведенных формул (4.1) - (4.12). Так как при малых перемещениях справедлив принцип суперпозиции, то все сложные деформации и соответствующие им усилия рассматриваются как сумма независимых простых деформаций или усилий. Рассматриваемые ниже виды напряженного состояния можно рассматривать как примеры использования этого принципа.

#### 4.2.6. Изгиб стержня в плоскости $zox$

Не повторяя всех выводов для случая чистого изгиба, воспользуемся готовыми зависимостями (4.2) - (4.5) и произведем поворот осей. В любом произвольном сечении будут иметь место напряжения

$$\sigma_z = E \cdot \kappa \cdot x,$$

равнодействующая которых - изгибающий момент относительно оси  $y$

$$M_y = \int_A E \cdot \kappa \cdot x^2 dA = \frac{\sigma_z \cdot I_y}{x}. \quad (4.13)$$

#### 4.2.7. Изгиб в двух плоскостях ( $zox$ и $zoy$ ) с растяжением (внецентренное растяжение)

Одновременный изгиб в двух плоскостях и растяжение будем рассматривать как сумму деформаций (рис. 4.8):

- осевое растяжение (см. п. 4.2.1.), которое вызывает равномерное удлинение связей  $\epsilon_{z1} = \Delta_1 / l$ ,

и соответствующие им напряжения (рис. 4.8)

$$\sigma_{z1} = E \cdot \epsilon_{z1},$$

с равнодействующей - продольной силой

$$N = \sigma_{z1} \cdot A;$$

- изгиб в плоскости  $zoy$ , который характеризуется (см.п.4.2.2) удлинением связей  $\epsilon_{z2} = \Delta_2 / l = \kappa_x \cdot y$ , напряжениями (рис.4.8)

$$\sigma_{z2} = E \cdot \kappa_x \cdot y$$

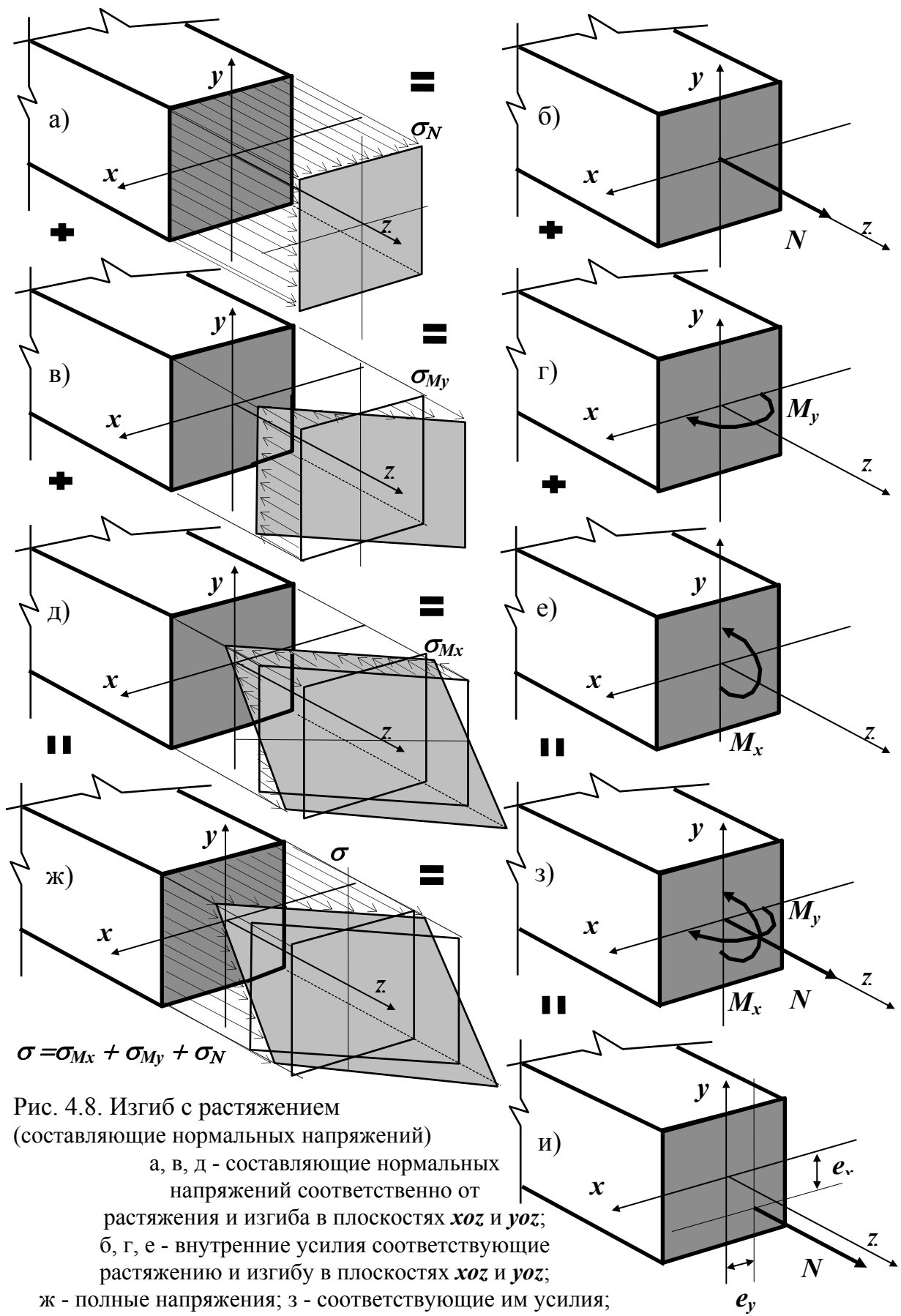


Рис. 4.8. Изгиб с растяжением  
 (составляющие нормальных напряжений)  
 а, в, д - составляющие нормальных напряжений соответственно от растяжения и изгиба в плоскостях  $xoz$  и  $yoz$ ;  
 б, г, е - внутренние усилия соответствующие растяжению и изгибу в плоскостях  $xoz$  и  $yoz$ ;  
 ж - полные напряжения; з - соответствующие им усилия;  
 и - замена усилий равнодействующей  $N$  с эксцентриситетами



и их равнодействующей - изгибающим моментом относительно оси  $x$

$$M_x = \sigma_{z2} \cdot I_x / y;$$

- изгиб в плоскости  $zOx$  (рис. 4.8), при котором возникают (см.п.4.2.6) деформации  $\epsilon_{z3} = \Delta_3 / l$ , напряжения

$$\sigma_{z3} = E \cdot \kappa_y \cdot x,$$

и их равнодействующая - изгибающий момент относительно оси  $y$

$$M_y = \sigma_{z3} \cdot I_y / x.$$

В результате сложения получаем общую деформацию

$$\epsilon_z = \epsilon_{z1} + \epsilon_{z2} + \epsilon_{z3},$$

суммарные напряжения (рис.4.8)

$$\sigma_z = \sigma_{z1} + \sigma_{z2} + \sigma_{z3},$$

которые приводятся к трем равнодействующим

$$N = \sigma_{z1} \cdot A, \quad M_x = \sigma_{z2} \cdot I_x / y, \quad M_y = \sigma_{z3} \cdot I_y / x;$$

или к одной продольной силе, смещенной по отношению к центру сечения:

$$\text{по оси } y - \text{ на величину (эксцентриситет) } e_x = M_x / N,$$

$$\text{по оси } x - \text{ на величину } e_y = M_y / N.$$

Для лучшего усвоения и закрепления материала рекомендуем читателю самостоятельно получить формулы внутренних усилий для следующих случаев.

#### 4.2.8. Сдвиг с кручением (для круглого стержня) (см. рис.4.9)

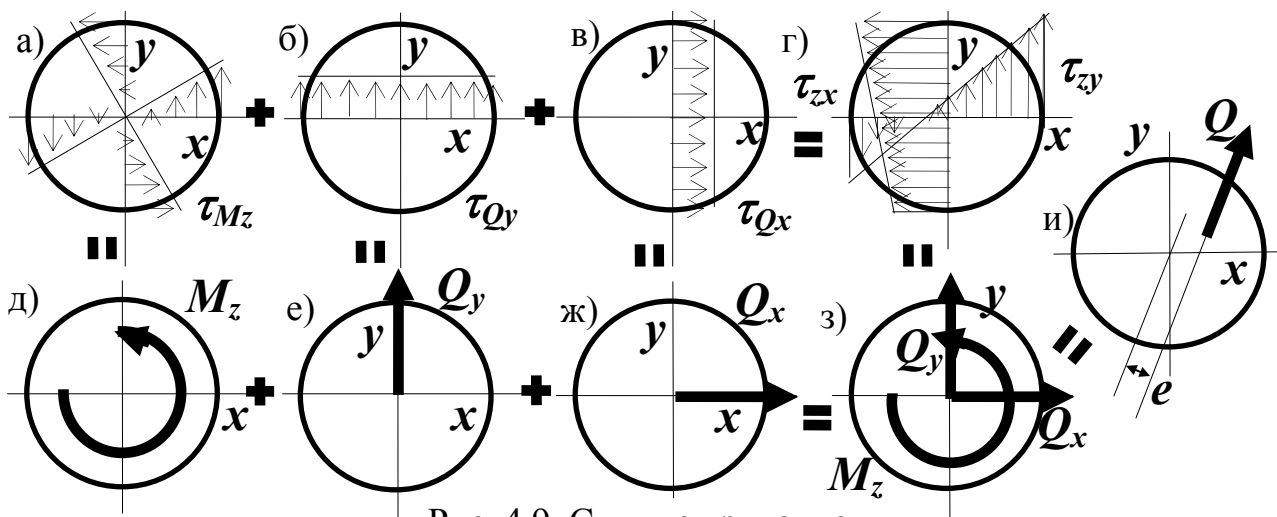


Рис. 4.9. Сдвиг с кручением

а, б, в - составляющие касательных напряжений соответственно от кручения и сдвига в направлении осей  $y$  и  $x$ ;

д, е, ж - внутренние усилия соответствующие кручению и сдвигу; г - полные напряжения; з - соответствующие им усилия;

и - замена усилий равнодействующей  $Q = \sqrt{Q_x^2 + Q_y^2}$  с эксцентриситетом  $e$

**4.2.9. Изгиб в плоскости  $zoу$  с кручением (для круглого стержня)** (для самостоятельного решения).

**4.3. Статический способ определения внутренних усилий**

Пусть под действием приложенной внешней нагрузки (рис.4.10) стержень находится в равновесии (дана самоуравновешенная система сил), т. е. для внешних сил выполняются условия

$$\left. \begin{aligned} \sum x = 0, & \quad \sum m_x = 0, \\ \sum y = 0, & \quad \sum m_y = 0, \\ \sum z = 0, & \quad \sum m_z = 0. \end{aligned} \right\} \quad (4.14)$$

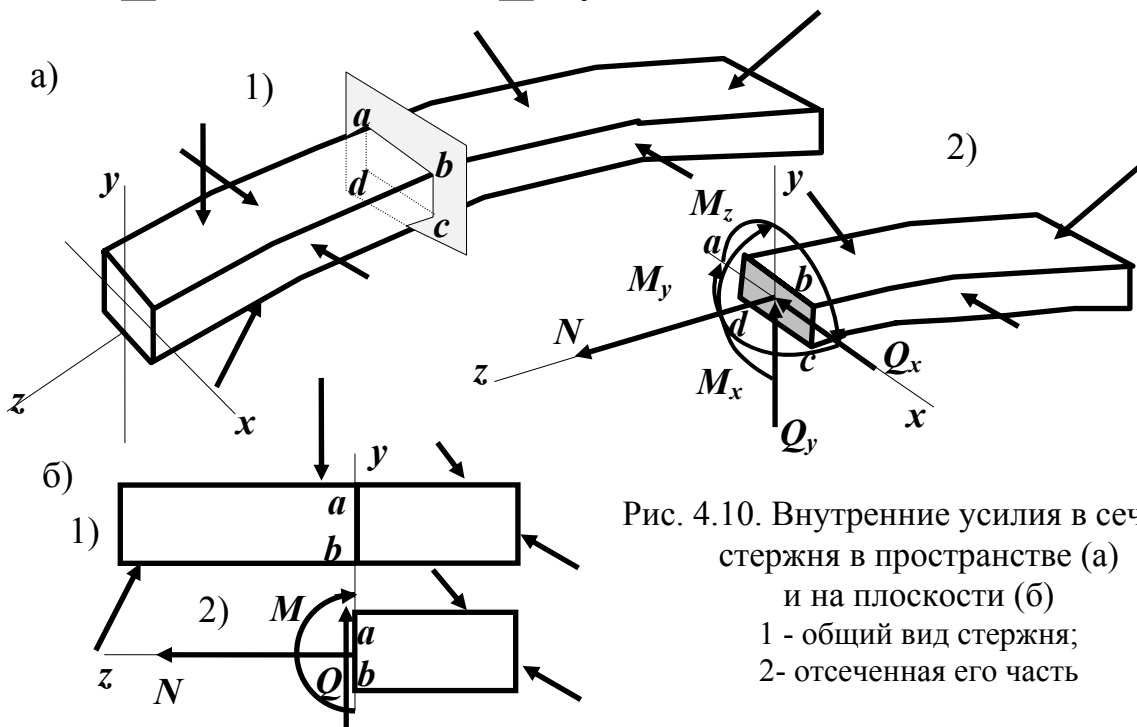


Рис. 4.10. Внутренние усилия в сечении стержня в пространстве (а) и на плоскости (б)  
1 - общий вид стержня;  
2- отсеченная его часть

Любая часть стержня должна находиться в равновесии под действием внешней нагрузки и внутренних усилий. Разделим стержень сечением  $abcd$  на две части. Чтобы не нарушить их равновесия, усилия в рассеченных связях заменим интегральными силовыми характеристиками (рис. 4.10). Ими должны быть: продольное усилие  $N$ , изгибающие моменты  $M_x, M_y$ ; крутящий момент  $M_z$ ; поперечные силы  $Q_x, Q_y$  (шесть параметров соответствуют шести степеням свободы плоского сечения или шести макросвязям). Для части стержня также должны быть справедливы уравнения равновесия (4.14), но только теперь в них войдут неизвестные внутренние усилия

$$\left. \begin{aligned} \Sigma x = P_x + Q_x = 0, & \quad \Sigma m_x = M_{px} + M_x = 0, \\ \Sigma y = P_y + Q_y = 0, & \quad \Sigma m_y = M_{py} + M_y = 0, \\ \Sigma z = P_z + N = 0, & \quad \Sigma m_z = M_{pz} + M_z = 0, \end{aligned} \right\} \quad (4.15)$$

где  $P_x, P_y, P_z$  - проекции приложенных к отсеченной части стержня внешних сил соответственно на оси  $x, y, z$ ;  $M_{px}, M_{py}, M_{pz}$  - моменты внешних сил относительно осей  $x, y, z$ .

Допущение о малости перемещений дает возможность в уравнения (4.15) ввести геометрические параметры (размеры, очертания осей или углы наклона сил и их плечи) недеформированного состояния. Ввиду этого число уравнений равновесия равно числу неизвестных, система является статически определимой. При решении плоской задачи будут иметь место только три внутренних усилия ( $M, Q, N$ ) и три уравнения равновесия.

Из системы (4.15) следует простой способ вычисления внутренних усилий в любом сечении свободного незамкнутого стержня, нагруженного самоуравновешенной нагрузкой. Для этого необходимо провести сечение, рассмотреть любую отсеченную часть стержня и составить соответствующие уравнения равновесия.

Приведенные выше рассуждения показывают, что внутренние усилия представляют собой интегральную характеристику напряженного состояния сечения в целом, в то время как напряжения определяют состояние отдельной точки сечения. Из этих же рассуждений следует, что по известным внутренним усилиям с учетом принятых геометрических гипотез легко могут быть найдены напряжения. Внутренние усилия, таким образом, являются основным инструментом анализа напряженного состояния конструкции. Поэтому задачу вычисления внутренних усилий в строительной механике часто называют основной.

Решение задачи определения внутренних усилий и напряжений принято представлять в виде графиков - эпюр усилий и напряжений. Они показывают значения усилий и характер их изменения по длине каждого элемента сооружения и эпюр напряжений - по сечению. Эпюры дают возможность при соответствующем опыте мгновенно оценить состояние конструкции, увидеть опасные сечения (точки), наметить при необходимости способы перераспределения внутренних усилий.

В анализе напряженно деформированного состояния элементов конструкций задача определения внутренних усилий является наиболее трудоемкой, и хотя все необходимые вычисления при этом полностью основываются на составлении уравнений равновесия, для ее успешного решения требуется иметь прочные практические навыки. В связи с этим

мы сочли целесообразным разделить задачу на отдельные простейшие этапы и подробно разобрать их в Приложении к настоящему курсу.

#### 4.4. Определение напряжений по внутренним усилиям

Если внутренние усилия известны, то на основе зависимостей (4.1) - (4.12.) можно осуществить переход к напряжениям. Формулы определения напряжений по внутренним усилиям для наиболее часто встречающихся видов деформации сведем в таблице 4.4.

Таблица 4.4  
Формулы для определения напряжений в поперечном сечении стержней

Вид напряженного состояния	Нормальные напряжения $\sigma$	Касательные напряжения $\tau$
1. Центральное растяжение или сжатие	$\sigma_z = \frac{N}{A}$	нет
2. Чистый изгиб в плоскости $zoy$  в плоскости $zox$  в двух плоскостях (косой чистый изгиб)	$\sigma_z = \frac{M_x \cdot y}{I_x}$  $\sigma_z = \frac{M_y \cdot x}{I_y}$  $\sigma_z = \frac{M_x \cdot y}{I_x} + \frac{M_y \cdot x}{I_y}$	нет  нет  нет
3. Сдвиг (срез)	нет	$\tau_{zy} = \frac{Q_y}{A}$  $\tau_{zx} = \frac{Q_x}{A}$
4. Кручение круглого стержня	нет	$\tau_\rho = \frac{M_z \cdot \rho}{I_\rho}$  $\tau_{zx} = \frac{M_z \cdot y}{I_\rho}$  $\tau_{zy} = \frac{M_z \cdot x}{I_\rho}$

Продолжение таблицы 4.4

Вид напряженного состояния	Нормальные напряжения $\sigma$	Касательные напряжения $\tau$
5. Поперечный изгиб в плоскости $zoy$  в плоскости $zox$  в двух плоскостях (косой изгиб)	$\sigma_z = \frac{M_x \cdot y}{I_x}$ $\sigma_z = \frac{M_y \cdot x}{I_y}$ $\sigma_z = \frac{M_x \cdot y}{I_x} + \frac{M_y \cdot x}{I_y}$	$\tau_{zy} = \frac{Q_y \cdot S_x}{I_x \cdot b_x}$ $\tau_{zy} = \frac{Q_y \cdot S_x}{I_x \cdot b_x}$ $\tau_{zx} = \frac{Q_x \cdot S_y}{I_y \cdot b_y}$ $\tau_{zx} = \frac{Q_x \cdot S_y}{I_y \cdot b_y}$
6. Чистый изгиб в плоскости $zoy$ с кручением (для круглого стержня)	$\sigma_z = \frac{M_x \cdot y}{I_x}$	$\tau_{zx} = \frac{M_z \cdot y}{I_\rho}$ $\tau_{zy} = \frac{M_z \cdot x}{I_\rho}$
7. Сдвиг с кручением (для круглого стержня)	нет	$\tau_{zx} = \frac{M_z \cdot y}{I_\rho} + \frac{Q_x}{A}$ $\tau_{zy} = \frac{M_z \cdot x}{I_\rho} + \frac{Q_y}{A}$
8. Косой изгиб с растяжением (сжатием) - косое внецентренное растяжение (сжатие)	$\sigma_z = \frac{N}{A} + \frac{M_x \cdot y}{I_x} + \frac{M_y \cdot x}{I_y} = \frac{N}{A} + \frac{Ne_y \cdot y}{I_x} + \frac{Ne_x \cdot x}{I_y}$	$\tau_{zy} = \frac{Q_y \cdot S_x}{I_x \cdot b_x}$ $\tau_{zx} = \frac{Q_x \cdot S_y}{I_y \cdot b_y}$

Вид напряженного состояния	Нормальные напряжения $\sigma$	Касательные напряжения $\tau$
9. Поперечный изгиб круглого стержня в плоскости $yoz$ с кручением	$\sigma_z = \frac{M_x \cdot y}{I_x}$	$\tau_{zy} = \frac{Q_y \cdot S_x}{I_x \cdot b_x} + \frac{M_z \cdot x}{I_\rho}$ $\tau_{zx} = \frac{M_z \cdot y}{I_\rho}$
Примечание. При определении напряжений для сложных напряженных состояний, так же как при выводе прямых формул определения внутренних усилий по напряжениям, используется принцип суперпозиции (принцип независимости действия сил), поэтому все недостающие формулы легко получить самостоятельно, разложив предварительно сложное напряженное состояние на простые составляющие. Этот прием, кроме того, позволит во всех случаях довольно просто определять положение опасных точек в сечении.		

Перед разбором примеров еще раз обратим внимание на то, что вычисления направлены на получение характеристик рабочего состояния, необходимых для проведения оценки прочности. Поэтому во всех случаях нас будут интересовать значения усилий и напряжений в опасных сечениях и в опасных точках.

**Пример 4.1.** Короткий прямоугольный стержень сечением 20x40 см сжимается центрально приложенной силой  $P = 27000$  кН (рис. 4.11). Определить напряжения в опасных точках.

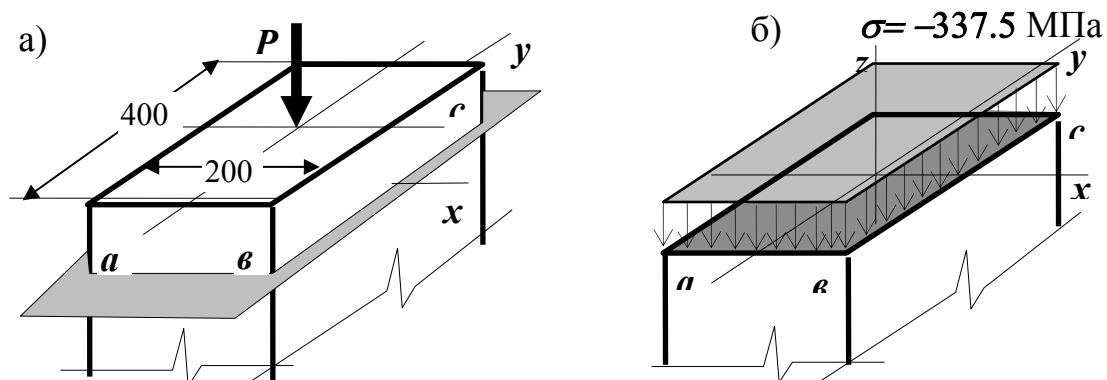


Рис. 4.11. Сжатие стержня силой, направленной по его оси

а - схема нагружения;

б - эпюра нормальных напряжений

**Р е ш е н и е.** При центральном сжатии все связи в сечениях оказываются в одинаковых условиях. Действующая постоянная по длине стержня продольная сжимающая сила

$$N = -P = -27000 \text{ кН}$$

укорачивает все связи по сечению в равной степени. Возникающие при этом силы в каждой связи - нормальные напряжения - равны

$$\sigma = -N/A = -27000/(40 \cdot 20) = -33.75 \text{ кН/см}^2 = -337.5 \text{ МПа.}$$

**П р и м е р 4.2.** Такая же сила  $P = 27000$  кН (см. предыдущий пример) прикладывается к тому же стержню, но со смещением на  $e = 5$  см по оси  $x$  и на  $e_y = 10$  см по оси  $y$  (рис 4.12). Определить напряжения в опасных точках.

**Р е ш е н и е.** Как и в предыдущем примере, внутренние усилия по длине стержня не меняются, но в каждом сечении за счет смещения точки приложения нагрузки кроме продольной силы

$$N = -P = -27000 \text{ кН}$$

появятся изгибающие моменты

$$M_x = P \cdot e_y = 27000 \cdot 10 = 270000 \text{ кН} \cdot \text{см},$$

$$M_y = P \cdot e_x = 27000 \cdot 5 = 135000 \text{ кН} \cdot \text{см}.$$

Значение напряжения при одновременном действии  $N$ ,  $M_x$  и  $M_y$  вычисляется по формуле (см. табл.4.4)

$$\sigma = \pm \frac{N}{A} \pm \frac{M_x \cdot y}{I_x} \pm \frac{M_y \cdot x}{I_y}.$$

Определим необходимые для вычисления напряжений геометрические характеристики сечения (см. табл. 4.1)

$$A = 20 \cdot 40 = 800 \text{ см}^2,$$

$$I_x = b \cdot h^3 / 12 = 20 \cdot 40^3 / 12 = 106666.7 \text{ см}^4,$$

$$I_y = h \cdot b^3 / 12 = 40 \cdot 20^3 / 12 = 26666.7 \text{ см}^4.$$

Знак первого слагаемого в формуле определения напряжений обуславливается знаком продольной силы. В данном случае продольная сила отрицательна.

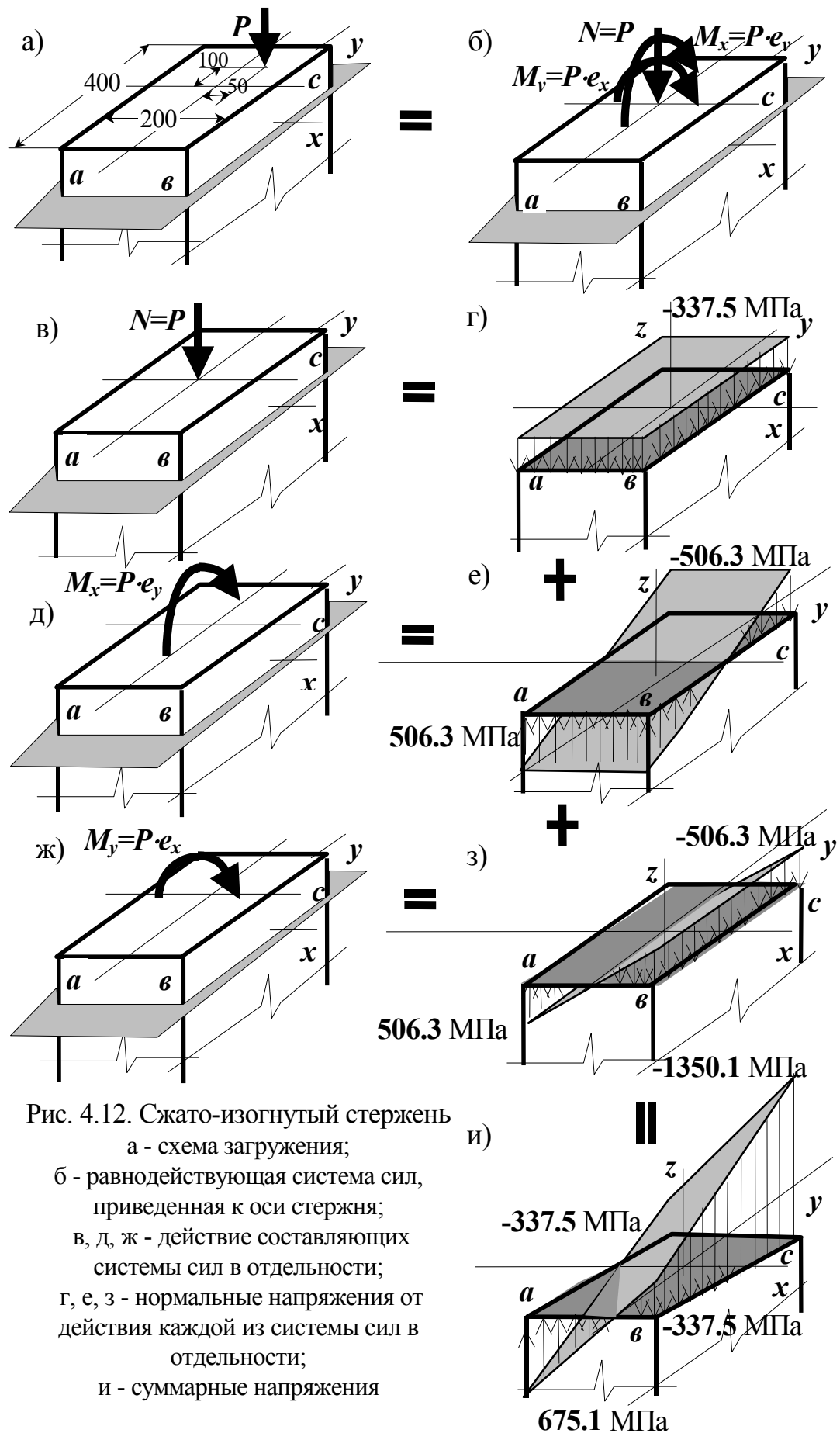


Рис. 4.12. Сжато-изогнутый стержень

- а - схема нагружения;
- б - равнодействующая система сил, приведенная к оси стержня;
- в, д, ж - действие составляющих системы сил в отдельности;
- г, е, з - нормальные напряжения от действия каждой из системы сил в отдельности;
- и - суммарные напряжения



Поэтому наибольшее значение напряжения получится в точке, для которой второе и третье слагаемое так же будут отрицательными (под действием моментов  $M_x$  и  $M_y$ , продольные связи будут сжиматься). Эта точка наиболее удалена от центра сечения ( $x_{max} = 10$  см,  $y_{max} = 20$  см). Значение напряжения в ней

$$\sigma = -27000/800 - 270000 \cdot 20 / 106666.7 - 135000 \cdot 10 / 26666 = -135.01 \text{ кН/см}^2 = -1350.1 \text{ МПа.}$$

Графическое нахождение положения опасной точки показано на рисунке 4.12. Из приведенного построения следует, что такой точкой будет угловая точка  $c$ .

Обратите внимание, что по сравнению с предыдущим примером изменилась только точка приложения нагрузки. Смещение нагрузки привело к увеличению напряжения в три с лишним раза.

**Пример 4.3.** Определить напряжения в опасных точках опасных сечений, если задан закон распределения внутренних усилий, представленный эпюрами  $M$ ,  $Q$ ,  $N$ , размеры стержня, форма и размеры поперечного сечения (рис. 4.13). Размеры сечения по длине стержня не меняются.

**Решение.** По таблице 4.4 определяем, что при действии на стержень  $M$ ,  $Q$ ,  $N$  (изгиб со сжатием) напряжения в его сечениях будут равны:

$$\begin{aligned} \text{нормальные } \sigma &= N/A + M_x \cdot y / I_x, \\ \text{касательные } \tau &= Q_y \cdot S_x / (I_x \cdot b). \end{aligned}$$

Опасными мы называем такие сечения, в которых возникают максимальные усилия. Если размеры сечения по длине стержня не меняются, то положение такого сечения определяется по эпюрам усилий. По приведенным эпюрам определяем, что в данном случае имеют место три опасных сечения: **2**, **4** и **3**. В сечении **3** изгибающий момент максимальный и, следовательно, появятся максимальные нормальные напряжения, но касательные при этом будут равны нулю. Из всех сечений с одинаковыми значениями поперечной силы выберем такое, где действует еще и изгибающий момент, так как их совместное действие может оказаться неблагоприятным. Чтобы получить представление о работе опасных сечений, построим для них эпюры напряжений.

Вычислим необходимые для определения напряжений геометрические характеристики:

$$\begin{aligned} \text{площадь сечения } A &= b \cdot h = 10 \cdot 20 = 200 \text{ см}^2, \\ \text{момент инерции } I_x &= b \cdot h^3 / 12 = 10 \cdot 20^3 / 12 = 6666.67 \text{ см}^4, \\ \text{статический момент} \end{aligned}$$

половины сечения  $S_x = b \cdot (h/2) \cdot (h/4) = 10 \cdot 10 \cdot 5 = 500 \text{ см}^3$

четверти сечения  $S_x = b \cdot (h/4) \cdot (3h/8) = 10 \cdot 5 \cdot 7.5 = 375 \text{ см}^3$ .

Напряжения в сечении 3. Эпюру нормальных напряжений можно получить путем графического сложения эпюр (по табл.4.4)  $\sigma_{z1} = N/A$  и  $\sigma_{z2} = M_x \cdot y / I_x$  (рис. 4.14).

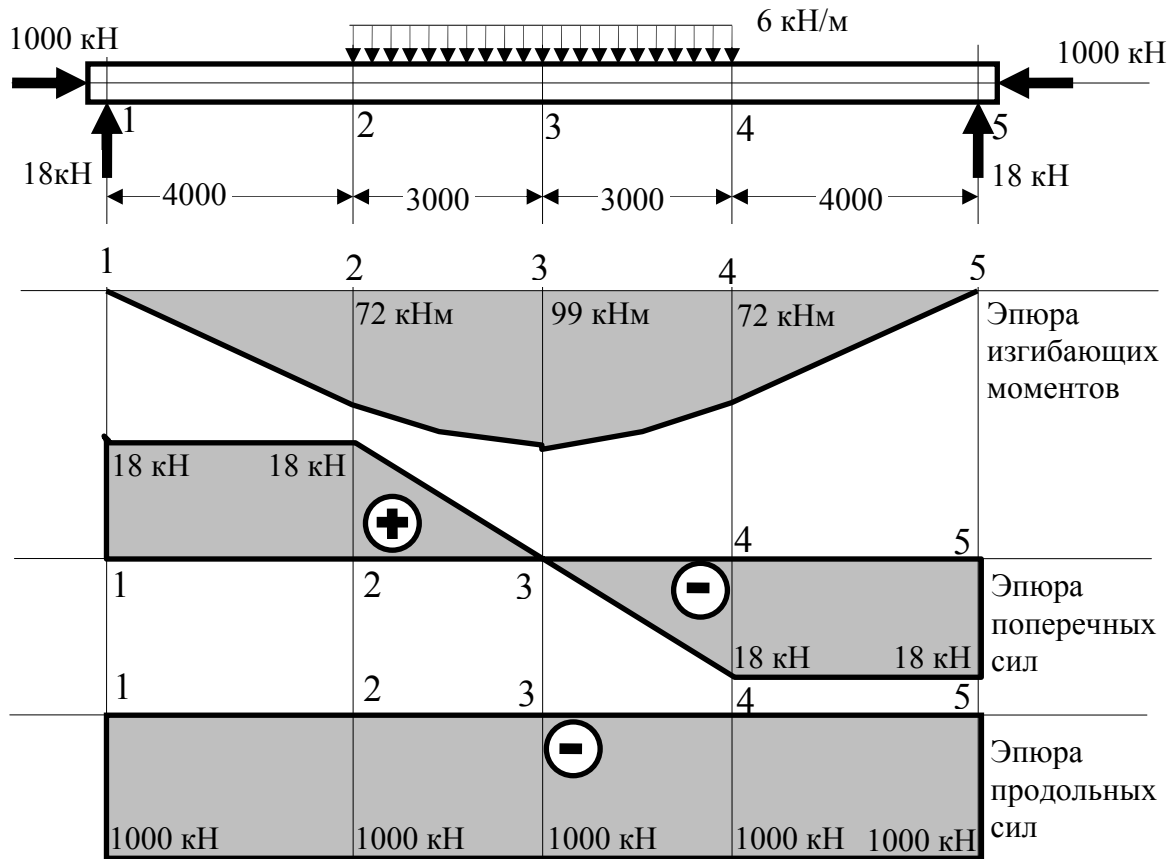


Рис. 4.13. Сжато-изогнутый стержень с эпюрами усилий

$\sigma_{z1} = N/A = - 1000/200 = - 5 \text{ кН/см}^2 = - 50 \text{ МПа}$  - сжимающее напряжение, равномерно распределенное по сечению;

$\sigma_{z2} = M_x \cdot y / I_x$  - зависит от  $y$ :

при  $y = 0$   $\sigma_{z2} = 0$ ,

при  $y = \pm h/2$  имеют наибольшие значения

$\sigma_{z2} = \pm 99 \cdot 10 \cdot 10 / 6666.67 = \pm 14.85 \text{ кН/см}^2 = \pm 148.5 \text{ МПа}$ .

По эпюре моментов определяем знаки напряжений. Так как верхние волокна сжаты, а нижние растянуты, то соответственно напряжения  $\sigma_{z2}$  по верхней грани сечения -  $\sigma^{\prime}$  отрицательные, по нижней -  $\sigma^{\prime\prime}$  положительные

$\sigma^{\prime} = - 5 - 14.85 = -19.85 \text{ кН/см}^2 = -198.5 \text{ МПа}$ ,

$\sigma^{\prime\prime} = - 5 + 14.85 = 9.85 \text{ кН/см}^2 = 98.5 \text{ МПа}$ .

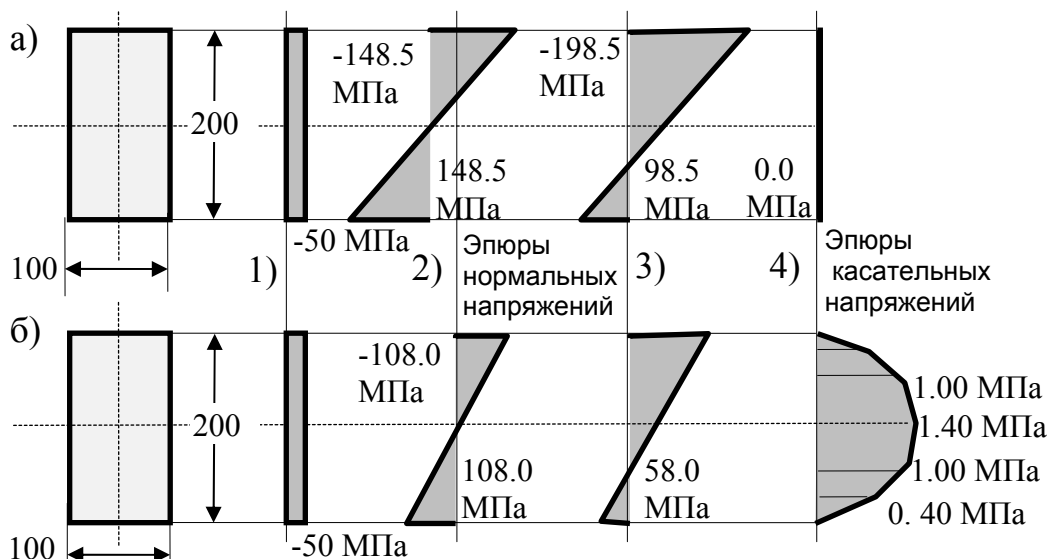


Рис. 4.14. Эпюры напряжений в сечениях 3 и 2 (см. рис. 4.13)

а - сечение 3, б - сечение 2.

1, 2, 3 – соответственно напряжения от продольных сил, изгибающих моментов, суммарные, 4- касательные напряжения

Наибольшие нормальные напряжения в сечении 3 сжимают верхние волокна.

*Напряжения в сечении 2* (рис 4.13в)

нормальные  $\sigma = (-1000/200 \pm 7200 \cdot 10/6666.67)$  кН/см<sup>2</sup>,

на верхней грани  $\sigma^e = -5 - 10.80 = -15.80$  кН/см<sup>2</sup> = -158 МПа,

на нижней  $\sigma'' = -5 + 10.80 = 5.80$  кН/см<sup>2</sup> = 58 МПа.

Касательные напряжения распределяются по криволинейному закону.

Эпюру напряжений построим по точкам

в середине сечения  $\tau = 18 \cdot 500 / (6666.67 \cdot 10) = 0.14$  кН/см<sup>2</sup> = 1.4 МПа,

в четверти сечения  $\tau = 18 \cdot 375 / (6666.67 \cdot 10) = 0.10$  кН/см<sup>2</sup> = 1.0 МПа,

в крайних точках  $\tau = 0$ .

**Пример 4.4** (для самостоятельного решения). Проверить, как изменятся напряжения в стержне, рассмотренном в предыдущем примере, если сечение повернуть на 90°, т. е. принять  $b = 20$  см,  $h = 10$  см.

Если внутренние усилия известны, то вычисление напряжений по формулам таблицы 4.2 затруднений обычно не вызывает. Но для анализа работы сооружения от инженера требуется не только уметь определять значения внутренних усилий и напряжений, но и хорошо (и это, пожалуй, главное) представлять, от чего зависят их величины и характер распределения. Для приобретения навыков в решении таких вопросов предлагаем самостоятельно решить следующие примеры.

Пример 4.5 - 4.11 (для самостоятельного решения). Определить опасные сечения и опасные точки в стержнях с заданными усилиями (рис. 4.15, 4.16, 4.17) и заданными поперечными сечениями (рис. 4.18) при условии, что размеры сечений по длине стержней не меняются. Постарайтесь рассмотреть как можно больше вариантов сечений для каждого стержня и сделайте выводы о влиянии формы сечения на напряжения.

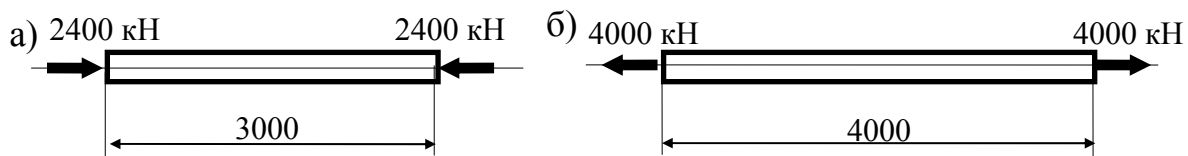


Рис. 4.15. Сжатый (а) и растянутый (б) стержень

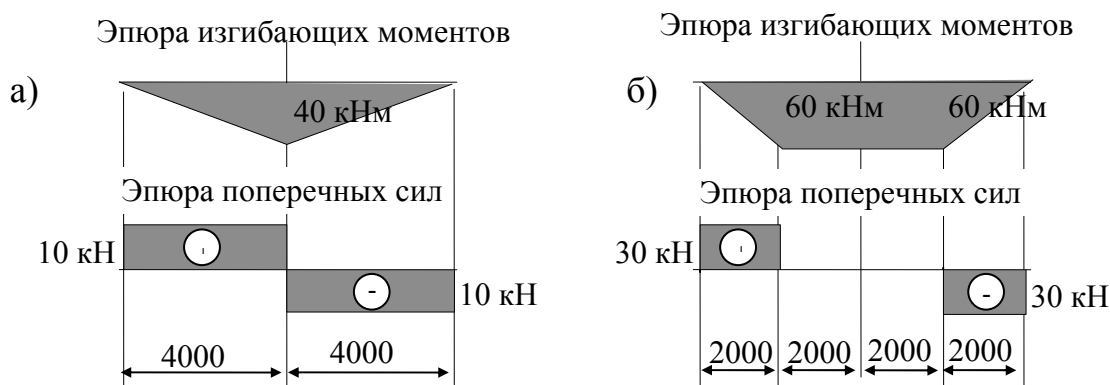


Рис. 4.16. Эпюры усилий в балках при действии трех (а) и четырех (б) сосредоточенных сил

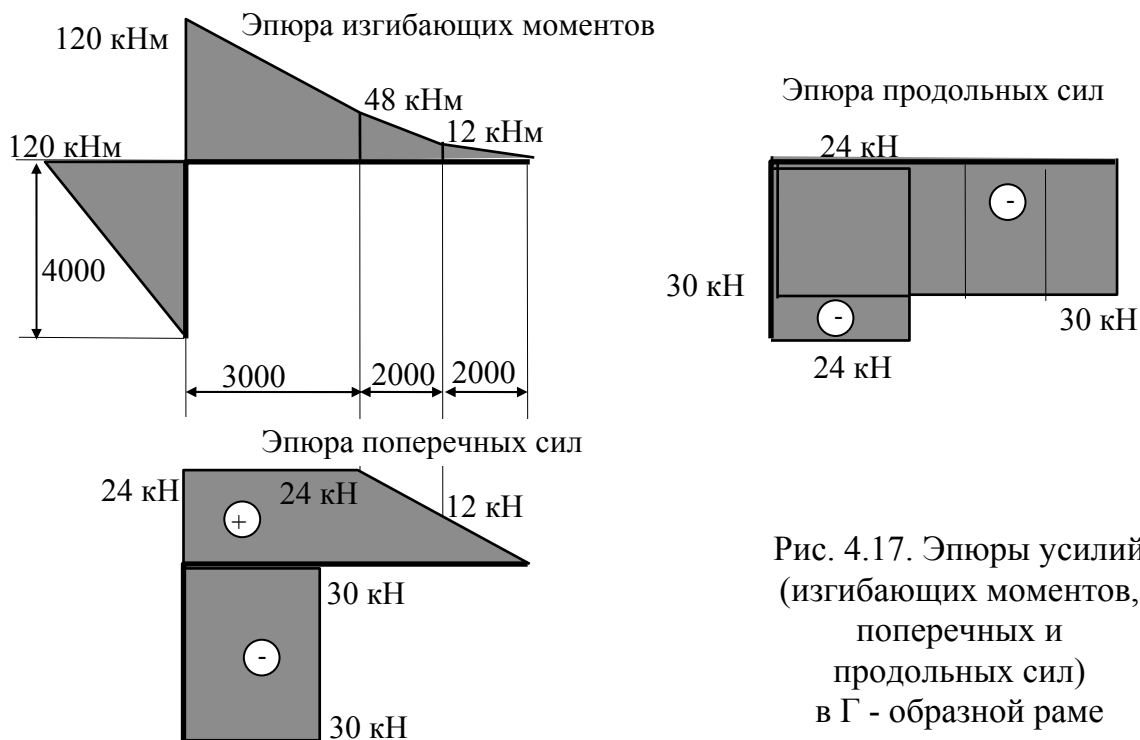


Рис. 4.17. Эпюры усилий (изгибающих моментов, поперечных и продольных сил) в Г - образной раме

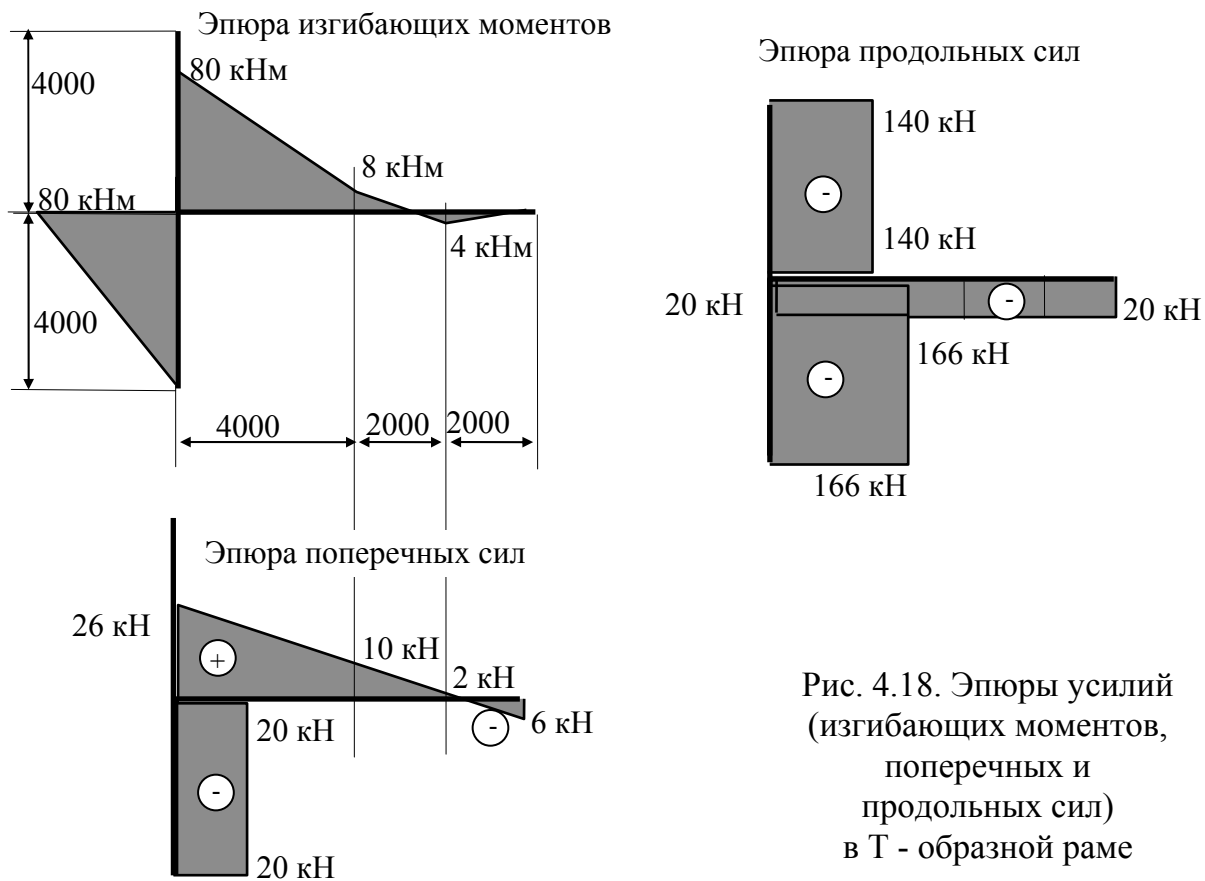


Рис. 4.18. Эпюры усилий (изгибающих моментов, поперечных и продольных сил) в Т-образной раме

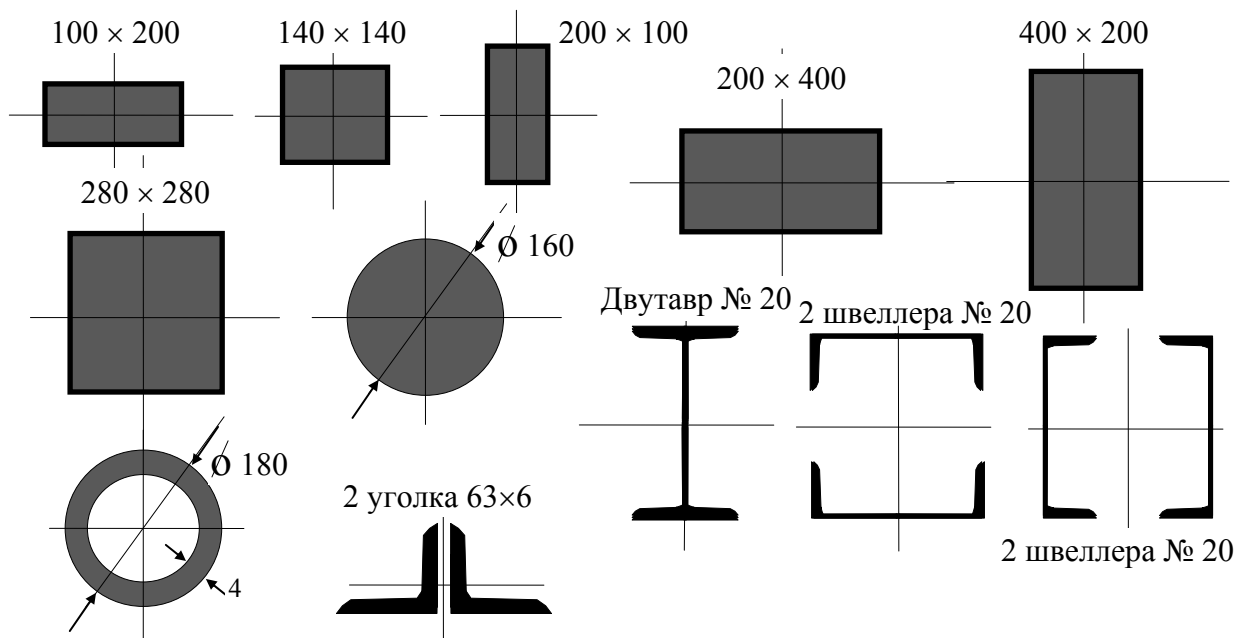


Рис. 4.19. Варианты прямоугольных, круглых и прокатных сечений

Пример 4.6 (для самостоятельного решения). Построить эпюры и определить опасные напряжения для стержней переменного сечения (рис.4.20). (В этом примере необходимо проверять не только сечения с максимальными усилиями, но и места перемены сечения).

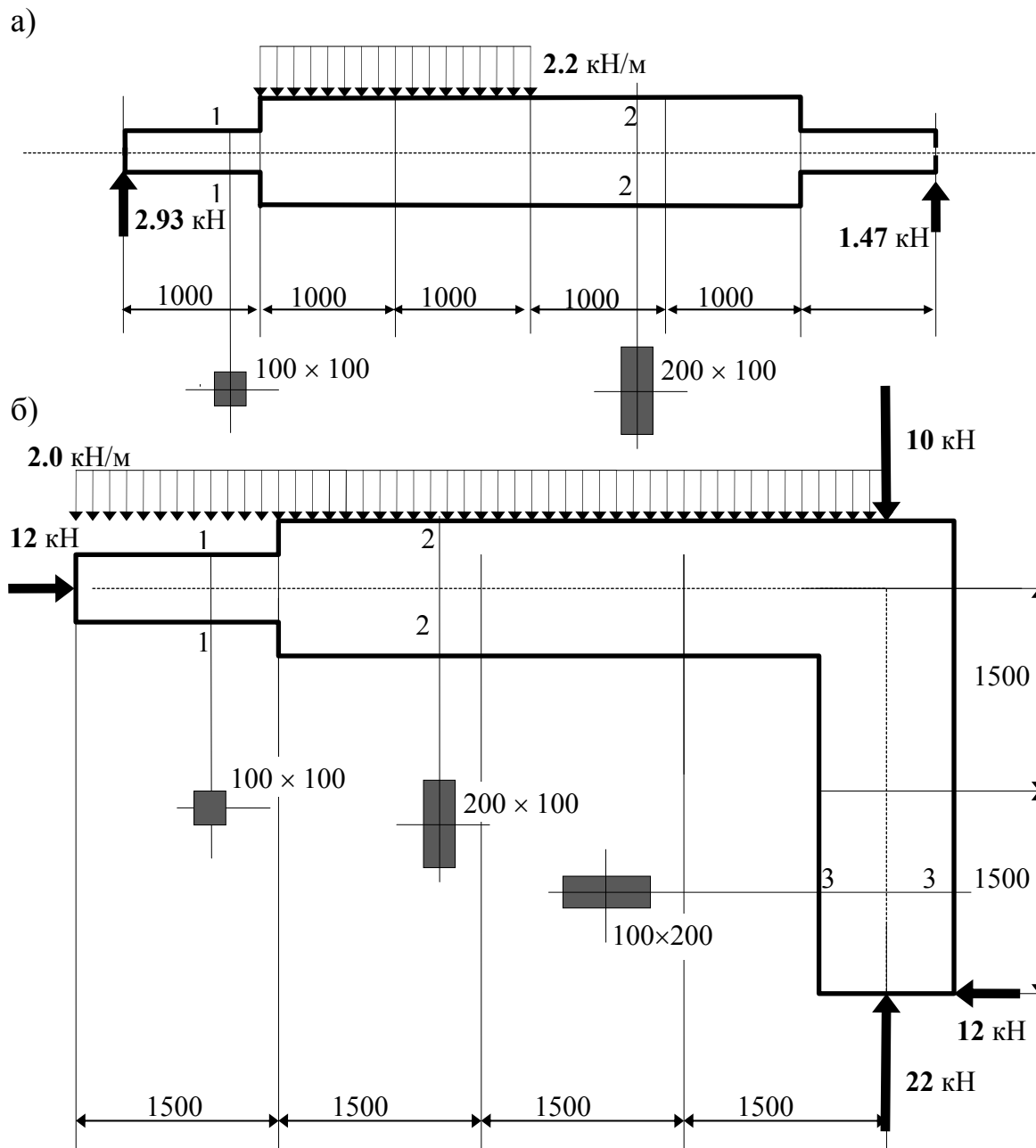


Рис. 4.20. Стержни переменного сечения  
 а - прямолинейный  
 б - Г - образный