

6. ОЦЕНКА ЭКСПЛУАТАЦИОННЫХ КАЧЕСТВ СООРУЖЕНИЙ ПО СИЛОВЫМ ХАРАКТЕРИСТИКАМ ВНУТРЕННИХ СВЯЗЕЙ

В соответствии с рассмотренной ранее моделью материала, свойства которого определяются характеристиками внутренних связей в рабочем и предельном состоянии, независимо от физического, геометрического или другого смысла характеристик, оценка прочности основана на проверке выполнения неравенства (1.1). Сооружение будет прочным, если максимально возможные усилия во внутренних связях не будут превышать предельно допустимых.

Неравенством (1.1) при ограниченной опорной базе можно оценить прочность либо отдельной связи (по напряжениям), либо отдельного сечения (линии) (по усилиям). Но чтобы оценить прочность всего сооружения, необходимо провести анализ распределения напряжений, усилий по всему сооружению, во всех его внутренних точках. И в каждой точке, кроме того, найти то направление, по которому связи будут максимально напряжены. Методический аппарат для этого подготовлен предыдущими рассуждениями. Ниже мы остановимся на практическом применении этого аппарата.

6.1. Централью нагруженный стержень

Пусть требуется оценить прочность центрально растянутого стержня (рис.6.1) при заданных размерах его поперечного сечения (h , b), длине (l) и нагрузке на одном конце (P) (второй конец закреплен).

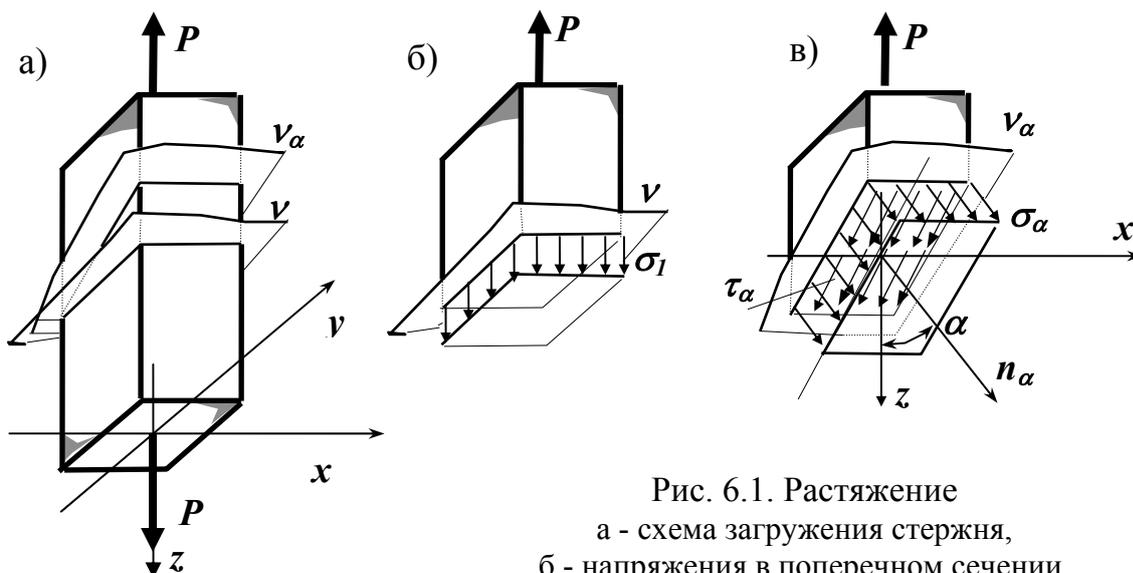


Рис. 6.1. Растяжение
а - схема нагружения стержня,
б - напряжения в поперечном сечении,
в - напряжения в наклонном сечении

Известны характеристики прочности материала - предельно допустимые (расчетные) нормальные $\sigma_{np} = R$ (растягивающие) и касательные $\tau_{np} = R_s$ (сдвигающие) напряжения.

Растяжение стержня центрально приложенной силой мы рассматривали ранее (см. п.4.2.1) и выяснили, что продольная сила $N = P$ (если не учитывать вес самого стержня, малый по сравнению с нагрузкой P) вдоль стержня не меняется. Поэтому мы можем рассматривать любое произвольное сечение. Нормальные напряжения во всех точках поперечного сечения одинаковы (по сечению распределены равномерно) и определяются по формуле, помещенной в таблице 4.2.

Свяжем все напряжения с осями координат стержня. В поперечном сечении, перпендикулярном оси z ,

$$\sigma_1 = N/A, \quad \tau_{zx} = \tau_{zy} = 0.$$

В сечениях, перпендикулярных осям x и y (вдоль стержня), соответственно:

$$\sigma_x = \sigma_y = 0,$$

$$\tau_{xy} = \tau_{zy} = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0.$$

Так как в поперечном и продольном сечениях отсутствуют касательные напряжения, эти площадки являются главными (см. п.3.3). Значения нормальных напряжений в поперечном сечении в связи с этим являются максимальными, то есть

$$\sigma_1 = \sigma_z = N/A, \quad \sigma_2 = \sigma_3 = 0.$$

Направления главных площадок и значения главных напряжений во всех точках стержня будут одинаковы. Любые другие площадки (не перпендикулярные осям x, y, z) не будут главными. Напряжения на них определяются по зависимостям (3.3), (3.4). Например, на площадке под углом α к оси z , для которой направляющие косинусы известны ($l = \cos \alpha, m = \sin \alpha, n = 0$), касательные и нормальные напряжения равны:

$$\tau = \sigma_1 \cos \alpha \sin \alpha = (\sigma_1 \sin 2\alpha) / 2,$$

$$\sigma = \sigma_1 \sin^2 \alpha.$$

Найдем такое положение площадки (угол α), при котором касательные напряжения будут максимальными. Функция $\sin 2\alpha$, стоящая множителем при постоянной величине $\sigma / 2$, будет иметь максимум (т. е. равна единице) при $2\alpha = \pi/2$ или $\alpha = \pi/4$. Таким образом, максимальные касательные напряжения при растяжении возникают на площадках, расположенных под углом 45° к оси стержня. При $\alpha = \pi/4$

$$\tau = \tau_{max} = \sigma_1 / 2 = N / (2A).$$

Следовательно, в растянутом стержне в каждой точке существуют две опасные плоскости с максимальными напряжениями рабочего состояния: нормальными - на плоскости, перпендикулярной оси стержня, и

касательными - на площадке под углом $\pi/4$ к оси. Естественно, в рамках принятой модели материала приходим к выводу, что ввиду разных по величине предельно допустимых напряжений на растяжение и сдвиг, стержень будет прочным, если выполняются два условия:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{max} &= \sigma_1 \leq \sigma_{np}, \\ \tau_{max} &= \sigma_1 / 2 \leq \tau_{np}. \end{aligned} \right\} \quad (6.1)$$

Подобные же рассуждения можно провести и для сжатого стержня.

В стальном стержне, в котором, как показывает практика,

$$\tau_{np} = 0.58 \sigma_{np},$$

опасным при растяжении является сечение, перпендикулярное оси. При сжатии короткого стержня из серого чугуна, в котором

$$\tau_{np} = 0.25 \sigma_{np \text{ сжатия}}$$

- наклонное сечение. Правда, если гибкость чугунного стержня велика, то предельное напряжение сжатия становится соизмеримым (иногда и меньшим) τ_{np} .

Если продольная сила N и (или) площадь поперечного сечения изменяются вдоль стержня, то для оценки его прочности необходимо построить функцию $N(z)/A(z)$ и выявить ее максимум.

Таким же образом можно проанализировать любое напряженное состояние стержня. Остановимся еще на двух.

6.2. Кручение круглого стержня

Круглый стержень длиной l и диаметром поперечного сечения D скручивается с консольной стороны моментом M_z (рис.6.2). Предельные напряжения σ_{np} и τ_{np} для материала стержня известны.

Найдем, как и в предыдущей задаче, такие точки и плоскости, в которых касательные и нормальные напряжения будут иметь наибольшие значения в рабочем состоянии. Принятые гипотезы плоских сечений дают возможность говорить о том, что во всех поперечных сечениях стержня при скручивании возникают только касательные напряжения (см. табл. 4.2)

$$\begin{aligned} \sigma_z &= 0, \\ \tau_{zx} &= M_z y / I_p, \\ \tau_{zy} &= M_z x / I_p. \end{aligned}$$

Касательные напряжения будут максимальными по контуру стержня. Например, в точке **A** с координатами $x = 0, y = D/2$

$$\begin{aligned}\sigma_z &= 0, \\ \tau_{zx} &= M_z D / (2I_p), \\ \tau_{zy} &= 0.\end{aligned}$$

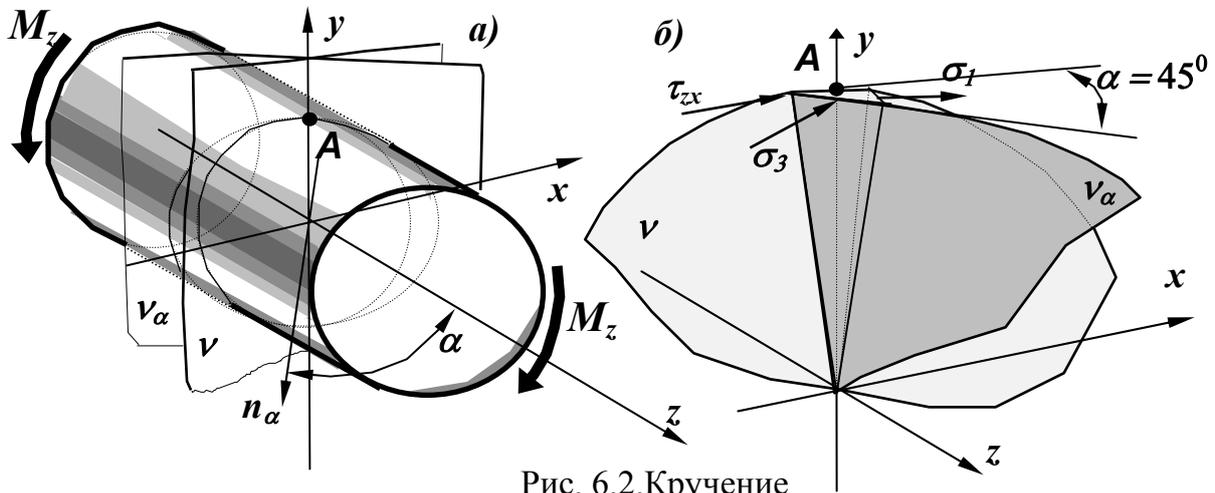


Рис. 6.2. Кручение
а - схема загрузки стержня,
б - площадки главных напряжений в окрестности точки А

На площадках вдоль стержня, перпендикулярных соответственно осям x и y ,

$$\begin{aligned}\sigma_x = \sigma_y &= 0, \\ \tau_{xz} = \tau_{zx} &= M_z D / (2I_p), \\ \tau_{xy} = \tau_{yx} = \tau_{yz} = \tau_{zy} &= 0.\end{aligned}$$

Определим по формулам (3.3), (3.4) напряжения на площадках под углом α к продольной оси (направляющие косинусы $l = \cos \alpha, m = \sin \alpha, n = 0$)

$$\left. \begin{aligned}\tau_\alpha &= \tau_{zx} \cos^2 \alpha - \tau_{xz} \sin^2 \alpha = M_z D \cos 2\alpha / (2I_p), \\ \sigma_\alpha &= (\tau_{zx} + \tau_{xz}) \sin \alpha \cos \alpha = M_z D \sin 2\alpha / (2I_p).\end{aligned} \right\} \quad (6.2)$$

Найдем главные площадки, для этого приравняем нулю τ_α , получим $\cos 2\alpha = 0$ или $\alpha = \pm \pi/4$. Главные напряжения получим из соотношения (6.2) при $\alpha = \pi/4$ и $\alpha = -\pi/4$ ($\sin(2\pi/4) = \sin(-2\pi/4) = 1$)

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= M_z D / (2I_p), \\ \sigma_2 &= -M_z D / (2I_p).\end{aligned}$$

Следовательно, опасными являются точки на поверхности стержня. Для них максимальные касательные напряжения находятся на площадках, перпендикулярных оси:

$$\tau_{max} = M_z D / (2I_p),$$

а нормальные максимальные напряжения - на площадках, расположенных под углом $\pm\pi/4$ (45°) к оси:

$$\sigma_1 = M_z D / (2I_p) \quad (\text{растяжение}),$$

$$\sigma_2 = -M_z D / (2I_p) \quad (\text{сжатие}).$$

Внутренние точки сечений напряжены меньше, так как касательные напряжения по мере приближения к центру тяжести сечения уменьшаются.

Проверка условий прочности (6.1) по нормальным и касательным напряжениям приводит к выводу о том, что для сталей ($\tau_{np} = 0.58\sigma_{np}$) опасными будут нормальные напряжения, так как $\tau_{max} = 0.5\sigma_1$. Касательные напряжения будут опасными и для серого чугуна, у которого предельно допустимые напряжения на растяжение составляют около трети сопротивления сжатию (см. табл. 5.4).

6.3. Поперечный изгиб призматического стержня

В случае поперечного изгиба исследование напряженного состояния становится более сложным. Пусть заданы величина и расположение нагрузки на стержень (рис.6.3), закрепление его по концам, размеры поперечного сечения и длина. Требуется определить положение напряженных связей.

В произвольном сечении стержня возникают нормальные и касательные напряжения (табл. 4.2)

$$\sigma_z = M_x y / I_x, \quad \tau_{zy} = Q_y S_x / (b I_x)$$

Нормальные напряжения достигают максимальных значений в крайних волокнах поперечного сечения, в которых

$$\sigma_z = M_x h / (2 I_x), \quad \tau_{zy} = 0.$$

Следовательно, главными площадками являются поперечное сечение стержня и продольные, перпендикулярные осям x и y , плоскости:

$$\sigma_1 = \sigma_z = M_x h / (2 I_x),$$

$$\sigma_2 = \sigma_3 = 0,$$

$$\tau_{yx} = \tau_{xy} = \tau_{zx} = \tau_{xz} = \tau_{zy} = \tau_{yz} = 0.$$

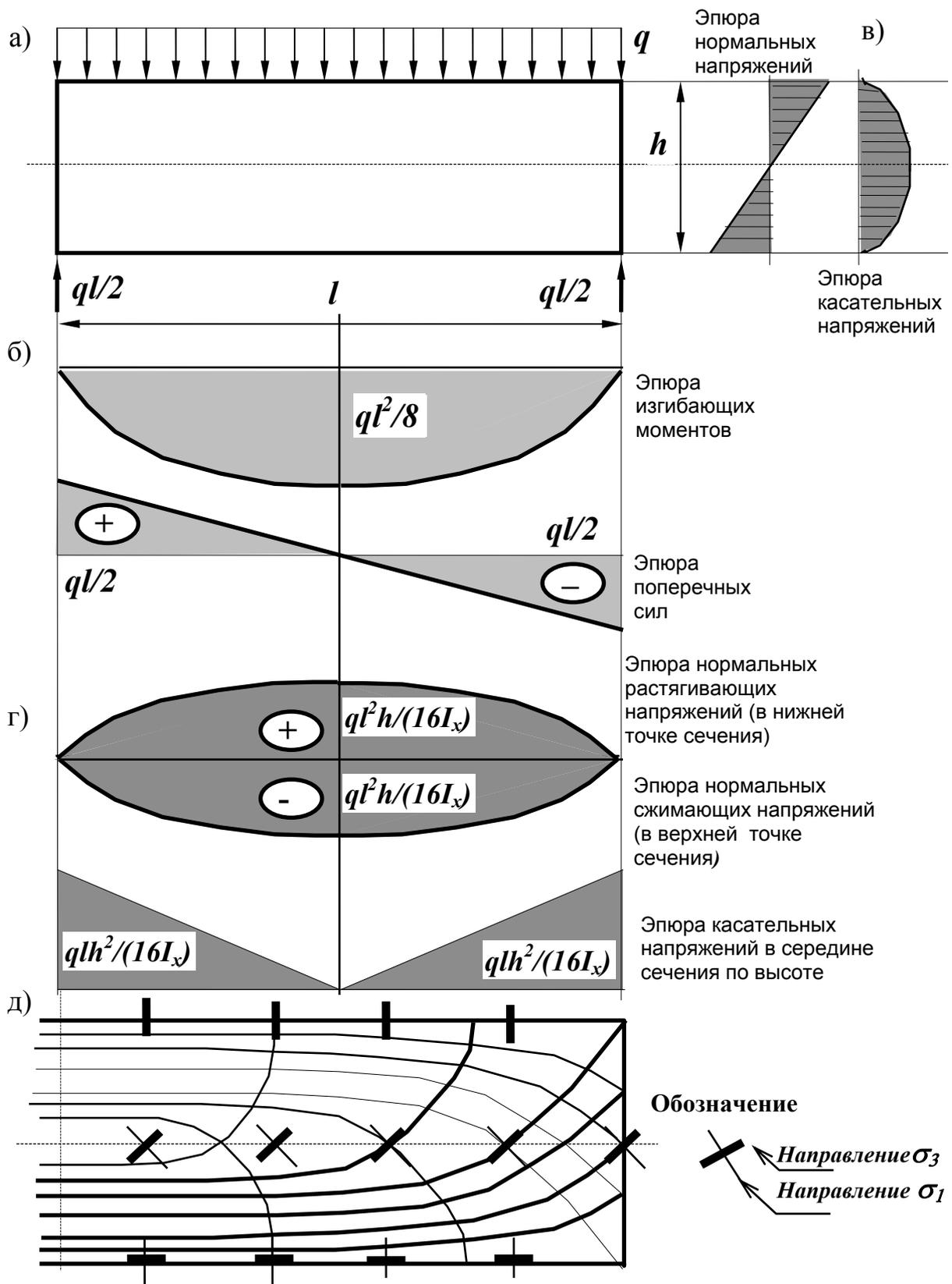


Рис. 6.3. Изгиб

а - схема нагружения, б - эпюры изгибающих моментов и поперечных сил, в - распределение нормальных и касательных напряжений в поперечном сечении, г - распределение нормальных и касательных напряжений вдоль стержня, д - траектории главных напряжений

Напряженное состояние крайних слоев стержня точно соответствует напряженному состоянию при центральном растяжении или сжатии. Поэтому максимальное нормальное напряжение $\sigma_{max} = \sigma_1$ расположено в поперечном сечении, а максимальные касательные напряжения - под углом $\alpha = \pi/4$ к оси стержня и равны $\tau_{max} = \sigma_1/2$. По длине стержня эта точка находится в месте максимального изгибающего момента. В данном случае - посередине пролета.

На нейтральной оси сечения $\sigma_z = 0$, но максимального значения достигают касательные напряжения

$$\tau_{zy} = Q_y S_x / (b I_x)$$

(здесь S_x - статический момент половины сечения относительно нейтральной оси). Напряженное состояние в этой точке точно соответствует напряженному состоянию при кручении. Поэтому заключаем, что касательные напряжения максимальны в поперечном сечении, а главные площадки наклонены под углом $\alpha = \pm \pi/4$ к оси стержня, причем главные напряжения имеют разные знаки (одно из них растягивающее, а другое - сжимающее):

$$\tau_{max} = \tau_{zy} = Q_y S_x / (b I_x),$$

$$\sigma_1 = -\sigma_3 = \tau_{zy}.$$

При постоянном по длине стержня сечении максимальные касательные напряжения совпадают с максимальной поперечной силой. В данном случае поперечная сила у опор имеет максимальное значение. Таким образом, максимальные нормальные напряжения рабочего состояния возникают в месте максимального изгибающего момента в крайних волокнах поперечного сечения. Максимальные касательные напряжения - в точке с максимальной поперечной силой в середине (на нейтральной оси) поперечного сечения.

Поиск сечений, площадок, точек с максимальными напряжениями является неотъемлемой частью оценки прочности сооружения. В этом деле огромную помощь оказывают эпюры усилий, напряжений и приемы исследования этих функций на экстремум.

Задача оценки прочности усложняется в связи с усложнением конструкции, нагрузок на нее и видов напряженных состояний¹.

Определив максимальные значения напряжений σ и τ , проверку условия прочности всего сооружения формально мы можем осуществить как проверку выполнения все тех же двух неравенств:

$$\sigma_{max} \leq \sigma_{np},$$

$$\tau_{max} \leq \tau_{np}.$$

¹ Читателю предлагаем проанализировать напряженное состояние внецентренно растянутого стержня постоянного сечения.

При выводе математических зависимостей между напряжениями и деформациями, описывающими внутреннее состояние стержня, принимается ряд упрощающих гипотез, в том числе исключается взаимное влияние продольных волокон друг на друга. При оценке прочности, когда речь идет уже о реальном сооружении, совсем не учитывать это влияние было бы не верно.

Решение задачи еще более усложнится, если мы будем рассматривать сложное напряженное состояние, когда одновременно придется учитывать действие разных напряжений. В этом случае всегда возникают вопросы, какой параметр выбрать для сравнения (для оценки прочности) и как учесть взаимное влияние всех параметров, определяющих напряженное состояние в точке.

Экспериментально-теоретические исследования материалов и способов оценки их прочности привели к созданию ряда критериев прочности (их часто называют теориями), основными из которых в настоящее время являются следующие.

6.4. Критерии (теории) прочности

6.4.1. Критерий наибольших нормальных напряжений

Испытания на растяжение стандартного цилиндрического образца из стали или чугуна показали, что разрушение происходит по сечению перпендикулярному к оси стержня (рис.6.4). Это приводит к выводу о том,



Рис. 6.4. Разрыв стального стержня при растяжении

что при таком способе загрузки разрушение обусловлено разрывом продольных связей, воспринимающих нормальные напряжения. Такая же картина разрушения наблюдается при растяжении бетона, камня, кирпича, дерева, пластмасс.

Долгое время считалось, что разрушение нормальных связей - единственная и общая для всех материалов причина разрушения. Такая трактовка разрушения является основой критерия наибольших нормальных напряжений. Согласно этому критерию условие прочности считается выполненным, если при любом плоском или пространственном напряженном состоянии максимальные нормальные напряжения не превышают предельных.

$$\sigma_{max} \leq \sigma_{np} . \quad (6.3)$$

Сформулированный, как принято считать, Галилеем, критерий наибольших нормальных напряжений долгое время был бесспорным и единственным. Все возможные несоответствия между экспериментальными и расчетными напряжениями объяснялись неточностью проведения опытов или несовершенством методов расчета.

Развитие технических средств регистрации результатов экспериментов послужило толчком к более тщательному детальному изучению внутреннего поведения материала. Оказалось, поведение отдельных связей зависит еще и от того, как работают соседние связи.

6.4.2. Критерий наибольших линейных деформаций

Поиски такого показателя прочности материала, который позволил бы одновременно учесть все внутренние характеристики, привели к созданию критерия наибольших линейных деформаций, по которому предельное состояние материала наступает при достижении максимальной линейной деформацией предельной (опасной) величины. Условие прочности при этом определяется неравенством

$$\varepsilon_{\max} \leq \varepsilon_{\text{пр}} . \quad (6.4)$$

6.4.3. Критерий наибольших касательных напряжений

И в первом и во втором критериях причиной разрушения считается разрыв нормальных связей. Однако при сжатии образцов из хрупких материалов (чугуна, бетона) разрушение происходит по плоскостям, не перпендикулярным оси, а расположенным под углом, соответствующим максимальным касательным напряжениям (рис.6.5). В таких материалах слабыми являются касательные связи. Их разрушением объясняется и течение образца из упругого материала при сжатии (рис. 6.6). Важную роль касательных напряжений в оценке прочности отстаивали Ш. О. Кулон (Coulomb Chales Augustin, 1736-1806) и О. Мор (Mohr Otto, 1835-1918). Их считают создателями критерия наибольших касательных напряжений, по которому предполагается, что предельное состояние материала независимо от вида напряженного состояния (от вида деформации) наступает при достижении касательными напряжениями предельной (опасной) величины. В этом случае условие прочности имеет вид

$$\tau_{\max} \leq \tau_{\text{пр}} \quad (6.5)$$

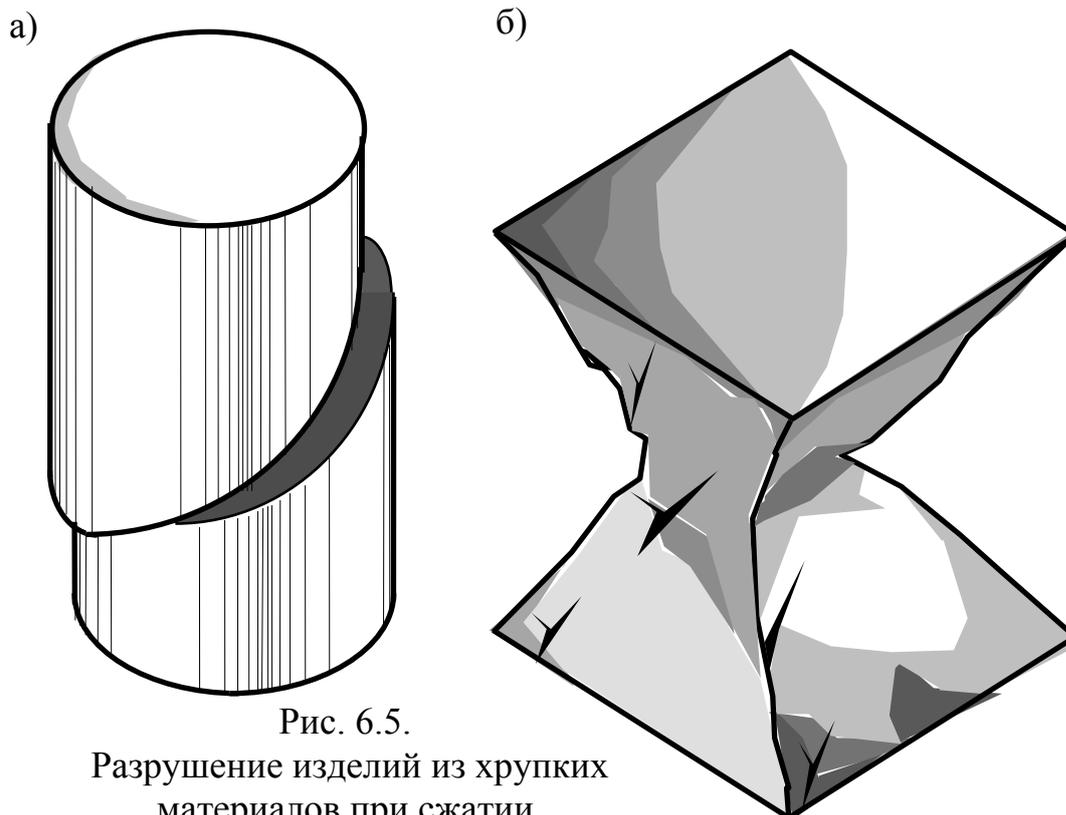


Рис. 6.5.
Разрушение изделий из хрупких
материалов при сжатии
а - цилиндр из чугуна, б - куба из бетона

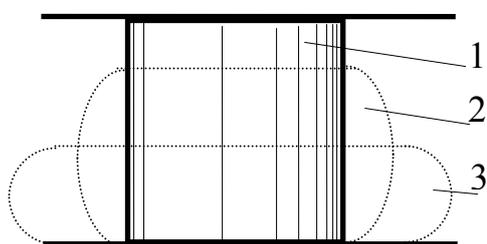


Рис. 6.6.
«Течение» стального
цилиндра при сжатии
(1, 2, 3 - последовательное
измерение формы образца)

6.4.4. Энергетический критерий

Учитывая пластическое деформирование материалов, М.П. Губер предложил в качестве фактора, определяющего наступление предельного состояния материала, принять потенциальную энергию формоизменения и считать условие прочности выполненным, если удельная потенциальная энергия формоизменения W , достигнутая в рабочем состоянии, не будет превышать предельно допустимой (опасной) W :

$$W \leq W_{np} . \quad (6.6)$$

Критерии (6.3) - (6.6) по-разному определяют причину разрушения. Но если воспользоваться уравнениями, устанавливающими связь между параметрами напряженного состояния в точке (3.3) - (3.4), то все предельные характеристики можно выразить через усилие в одной связи. В качестве такой общей характеристики удобно принять нормальные напряжения.

Тогда для критерия наибольших линейных деформаций с учетом закона Гука (3.10) получим

$$\sigma_{max} = \max \left\{ \begin{array}{l} \sigma - \mu (\sigma + \sigma) \\ \sigma - \mu (\sigma + \sigma) \\ \sigma - \mu (\sigma + \sigma) \end{array} \right\} \leq \sigma_{np}. \quad (6.7)$$

Для критерия наибольших касательных напряжений с учетом выражения (3.4)

$$\sigma_{max} = \sigma_1 - \sigma_3 \leq \sigma_{np}. \quad (6.8)$$

Для энергетического критерия, принимая во внимание

$$W = (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\mu(\sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1 + \sigma_1\sigma_2)),$$

$$\sigma_{max} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_2\sigma_3 - \sigma_3\sigma_1 - \sigma_1\sigma_2} \leq \sigma_{np}. \quad (6.9)$$

Критерии (6.3) -(6.6) принято называть предельными, так как уравнение в них ведется по предельным напряжениям.

Приведенные критерии прочности не единственные, но чаще всего используются в строительной практике. Поскольку ни один из них полностью не отражает весь сложный механизм разрушения (такого единого критерия пока нет), в случаях, когда трудно однозначно установить причину разрушения, целесообразно произвести проверку по всем критериям и за окончательное решение принять то, где разрушение наступает в первую очередь.

6.4.5. Примеры оценки прочности

Пример 6.1. Проверить прочность деревянной балки длиной 12 м со сложным поперечным сечением (рис. 6.7), загруженной постоянной равномерно распределенной нагрузкой $q = 40$ кН/м.

Решение. *Определение внутренних усилий и напряжений*

Балка работает на поперечный изгиб в плоскости yoz . Распределение усилий (см. п. 6.3) характеризуется по длине балки эпюрами внутренних усилий M и Q , по поперечным сечениям - эпюрами напряжений σ и τ .

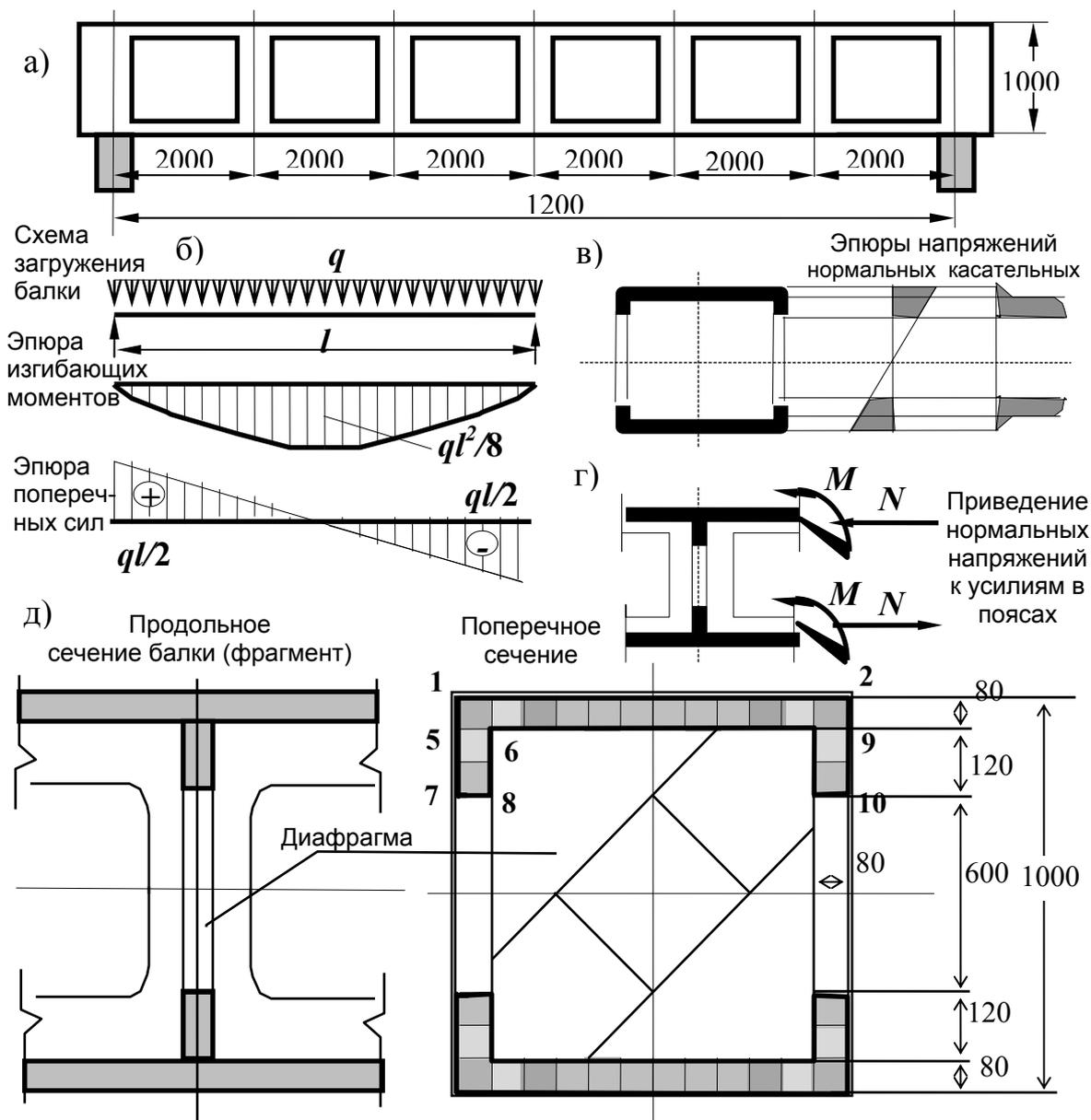


Рис. 6.7. Клееная балка коробчатого поперечного сечения
 а - общий вид, б - расчетная схема и усилия, в - эпюры напряжений,
 г - усилия в поясах, д - поперечное и продольное сечения

После определения опорных реакций ($V_A = V_B = 24$ кН) получаем эпюры усилий, представленные на рисунке 6.7 (все необходимые для вычисления ординат расчеты читатель может легко выполнить самостоятельно, поэтому мы здесь на этих расчетах не останавливаемся).

Построение эпюр напряжений в сечениях рассмотрим подробно. Вычислим сначала все необходимые для определения σ и τ геометрические характеристики сечений (формулы см. табл.4.1). Так как сечение сложное, для вычисления момента инерции разобьем его на

простые прямоугольники. Для вычисления моментов инерции каждого прямоугольника воспользуемся формулой переноса осей

$$I_x = I_{x1} + A a^2,$$

где I_{x1} - собственный момент инерции прямоугольника, то есть момент инерции относительно оси, проходящей через центр тяжести (оси x) прямоугольника; A - площадь прямоугольника; a - расстояние от оси x до центра тяжести прямоугольника.

$$I_{x1295} = (1 \cdot 0.08^3)/12 + 0.08 \cdot 1 \cdot 0.46^2 = 0.017 \text{ м}^4,$$

$$I_{x5678} = (0.08 \cdot 0.12^3)/12 + 0.08 \cdot 0.12 \cdot 0.36^2 = 0.0013 \text{ м}^4.$$

С учетом симметрии момент инерции всего сечения

$$I_x = 2 \cdot I_{x1295} + 4 \cdot I_{x5678} = 0.039 \text{ м}^4.$$

Статический момент определим для крайних точек (1,2), для точек, где происходит изменение ширины сечения (5,9) и для точек 8, 10 (см. Рис. 6.7). Сечение также будем считать состоящим из отдельных прямоугольников. Статический момент прямоугольника относительно оси x

$$S = A \cdot a,$$

тогда: для точек 1 и 2 - $S = 0$,

$$\text{для точек 5 и 9} - S = 1 \cdot 0.08 \cdot 0.46 = 0.0368 \text{ м}^3,$$

$$\text{для точек 8 и 10} - S = 1 \cdot 0.08 \cdot 0.46 + 2 \cdot 0.08 \cdot 0.12 \cdot 0.36 = 0.0437 \text{ м}^3$$

Наибольшие нормальные напряжения (см.п.6.3) будут возникать в поперечном сечении в середине балки в верхних и нижних волокнах, причем в этих точках положение главных площадок будет совпадать с поперечным сечением. В верхних волокнах

$$\sigma_{min} = \sigma_3 = -M \cdot h / (2 \cdot I_x) = -720 \cdot 1 / (2 \cdot 0.039) = -9231 \text{ кН/м}^2,$$

$$\sigma_{max} = \sigma_1 = M \cdot h / (2 \cdot I_x) = 720 \cdot 1 / (2 \cdot 0.039) = 9231 \text{ кН/м}^2.$$

Чтобы построить эпюру σ , соединим полученные ординаты (рис. 6.7) и отбросим ту часть графика, которая оказывается в пустоте.

Касательные напряжения будут максимальными на опорах. Эпюра τ нелинейная, построим ее по точкам

$$\tau_{12} = 0,$$

$$\tau_{59} \text{ (верхний прямоугольник)} = 240 \cdot 0.0368 / (0.039 \cdot 1) = 226 \text{ кН/м}^2,$$

$$\tau_{59} \text{ (нижний прямоугольник)} = 240 \cdot 0.0368 / (0.039 \cdot 0.16) = 1415 \text{ кН/м}^2,$$

$$\tau_{810} = 240 \cdot 0.0437 / (0.039 \cdot 0.16) = 1681 \text{ кН/м}^2.$$

Проверка прочности

С учетом действующих напряжений проверку прочности среднего сечения балки произведем на основе критерия максимальных нормальных напряжений, крайних сечений - максимальных касательных напряжений. Прочностные характеристики древесины принимаем по

таблице 5.3; расчетное сопротивление при растяжении вдоль волокон $R_{np}^p = 10$ МПа = 10000 кН/м², при сжатии вдоль волокон $R_{np}^c = 14$ МПа = 14000 кН/м², при скалывании $R_{np}^s = 1.8$ МПа = 1800 кН/м. При этих характеристиках

$$\begin{aligned} \sigma_3 &= -9231 \text{ кН/м}^2 < R_{np}^c = 14000 \text{ кН/м}^2, \\ \sigma_1 &= 9231 \text{ кН/м}^2 < R_{np}^p = 10000 \text{ кН/м}^2, \\ \tau_{max} &= 1681 \text{ кН/м}^2 < R_{np}^s = 1800 \text{ кН/м}^2. \end{aligned}$$

Таким образом, условия прочности в опасных сечениях выполняются.

Умение анализировать влияние различных факторов на прочность сооружения позволяет перейти от поверочного расчета к задачам проектирования оптимальных конструкций. Чаще всего при этом приходится искать ответы на следующие вопросы.

Что сделать, чтобы при заданных условиях загрузки конструкция оставалась прочной?

Какое по форме и размерам должно быть сечение?

Какой выбрать материал?

Пример 6.2. Для прямого стержня по заданной эпюре моментов (рис.6.8) определить рациональное распределение материала вдоль оси.

Решение. Исходя из критерия оценки прочности по наибольшим нормальным напряжениям

$$\sigma = M / W \leq R,$$

где σ - действующее напряжение, M - изгибающий момент, W - момент сопротивления стержня (для стержня прямоугольного сечения $W = bh^2 / 6$, см. табл. 4.1), R - расчетное (предельно допустимое) напряжение. При постоянной ширине стержня прямоугольного сечения b получим его высоту

$$h \geq \sqrt{6 |M| / (R b)} = k \sqrt{|M|},$$

($k = \sqrt{6} / (R b)$ для заданного материала и ширины сечения - величина постоянная).

Оптимальная высота сечения, соответствующая заданной эпюре, показана на рисунке 6.8.

В некоторых случаях повышение прочности достигается неожиданными, на первый взгляд, приемами.

Пример 6.3². Проверить прочность короткого деревянного бруса квадратного сечения 20×20 см, ослабленного односторонней врезкой

² Пример взят из учебника: Михайлов А.М. Сопротивление материалов. - М.: Стройиздат, 1989.

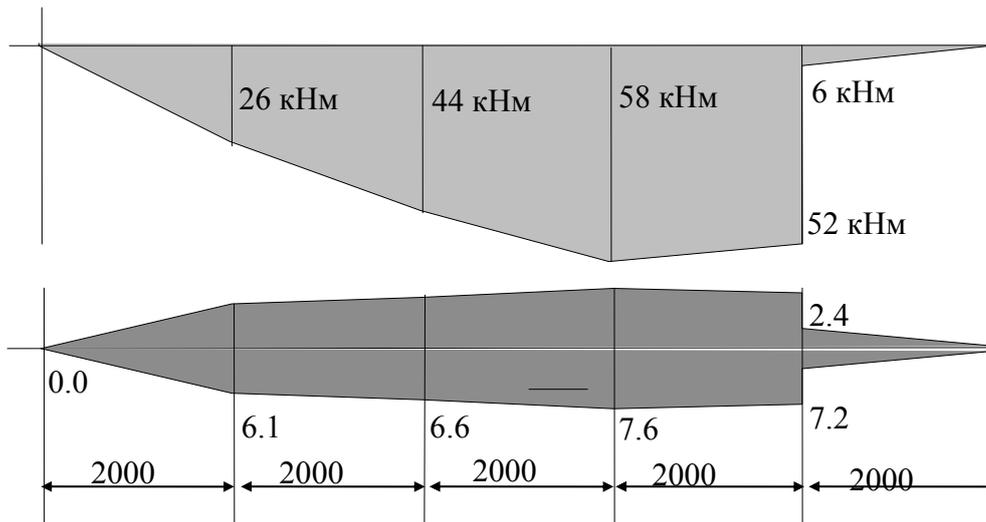


Рис. 6.8. Конструктивный образ бруса прямоугольного сечения постоянной ширины

а - эпюры изгибающих моментов, б - изменение относительной высоты бруса (h/k)

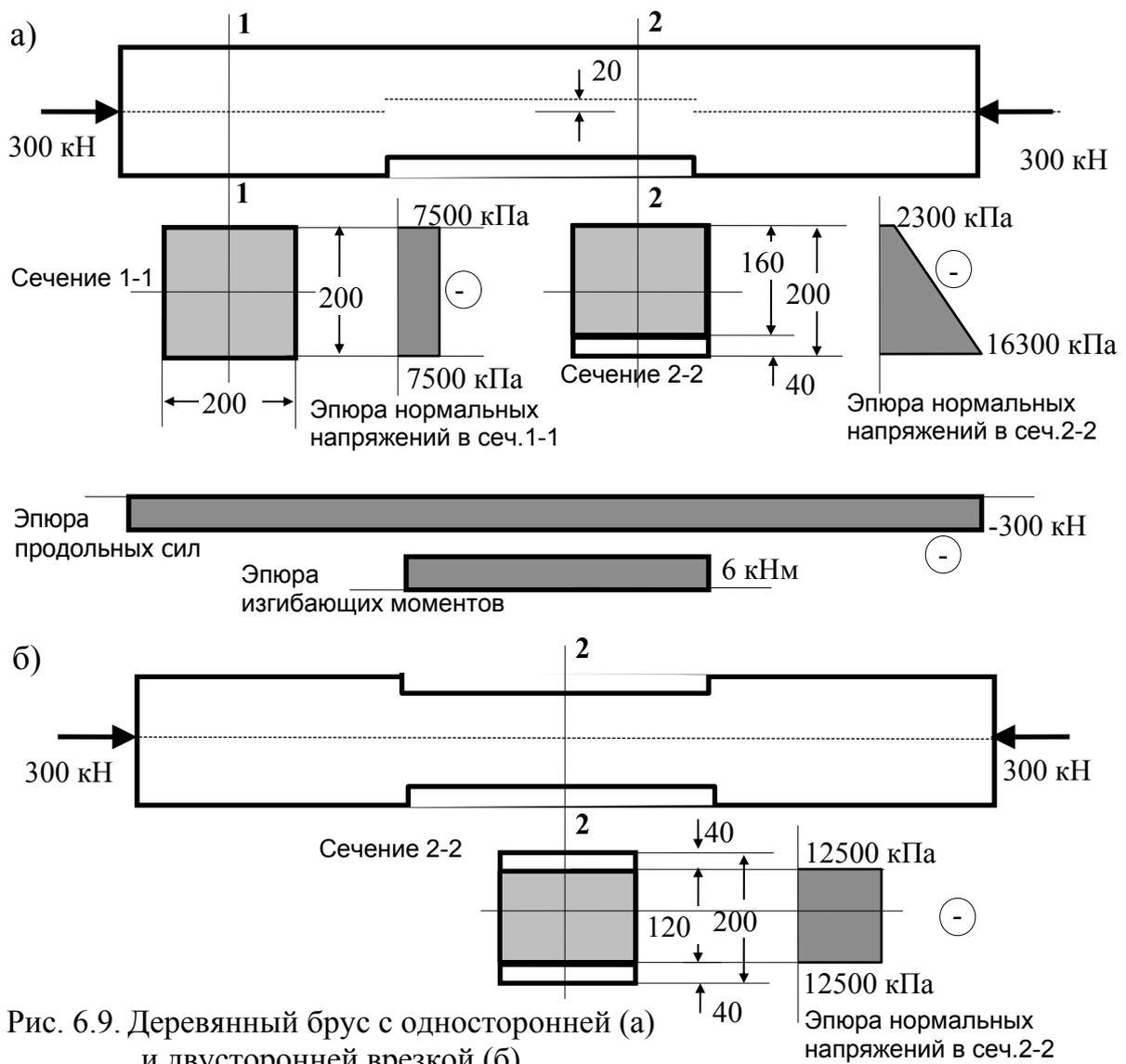


Рис. 6.9. Деревянный брус с односторонней (а) и двусторонней врезкой (б)

глубиной $h = 4$ см. Стержень сжимается продольной силой $|N| = 300$ кН (рис.6.9). Расчетное сопротивление древесины сжатию $R_{np} = 15$ МПа.

Решение. Напряжение в неослабленном сечении

$$|\sigma| = |N|/A = 300/(0.2 \cdot 0.2) = 7.5 \text{ МПа} < R_{np} = 15 \text{ МПа.}$$

В ослабленном сечении за счет смещения его центра тяжести появляется изгибающий момент

$$M = 300 \cdot 0.02 = 6 \text{ кНм.}$$

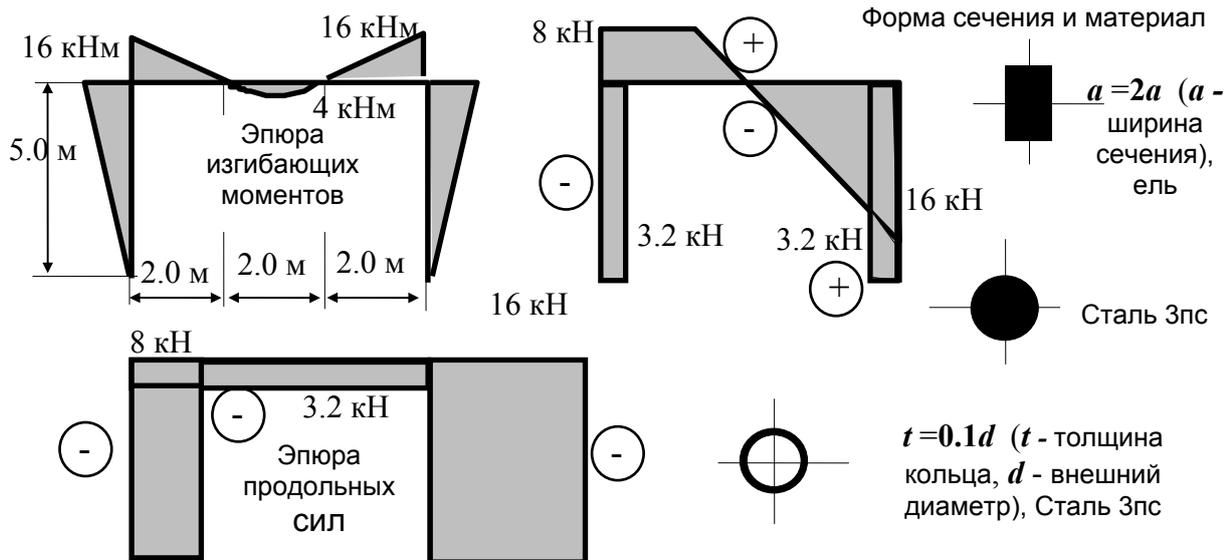


Рис. 6.10. Эпюры усилий, материал и формы поперечных сечений стержней прямоугольной рамы

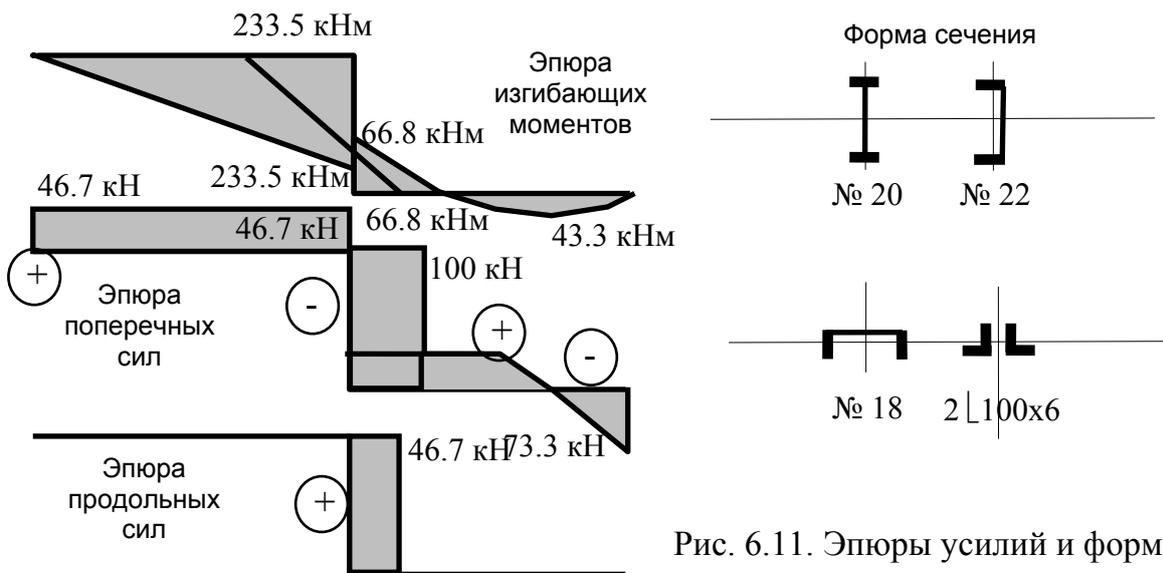


Рис. 6.11. Эпюры усилий и формы поперечных сечений стержней рамы (материал сталь 10ХСНД)

С учетом действия N и M напряжение сжатия

$$|\sigma| = |N|/A + M/W = 300/(0.2 \cdot 0.16) + 6 \cdot 6/(0.2 \cdot 0.16) = \\ = 16.4 \text{ МПа} > R_{np} = 15 \text{ МПа},$$

($W = bh^2/6$ - момент сопротивления сечения). Такое напряжение стержень не выдержит, чтобы его снизить делается еще одна врубка сверху (рис. 6.9,б). Тогда изгибающий момент становится равным нулю, и напряжение снижается:

$$|\sigma| = |N|/A = 300/(0.2 \cdot 0.12) = 12.5 \text{ кН/см} < R_{np} = 15 \text{ МПа},$$

то есть условие прочности удовлетворяется.

Примеры 6.4 - 6.12 (для самостоятельного решения). Подобрать размеры поперечных сечений заданной формы из заданного материала, если известны эпюры распределения внутренних усилий M , Q , N (рис. 6.10, 6.11). Характеристики прочности материалов принять по таблицам 5.1 - 5.7. Какой из стержней, имеющих сечения из приведенных на рисунке 6.12, и почему лучше использовать при изгибе, при растяжении, при кручении.

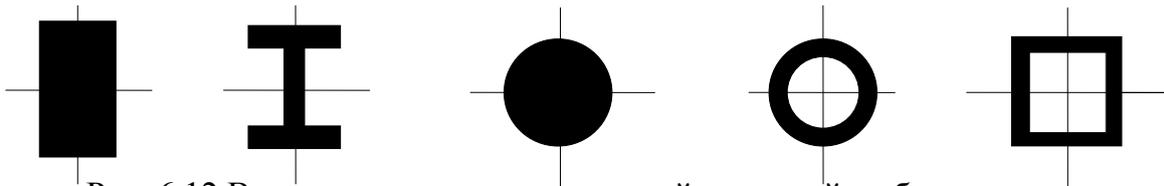


Рис. 6.12. Варианты поперечных сечений стержней, работающих на растяжение (сжатие), кручение и изгиб

6.5. Длительная прочность

Предельные напряжения могут служить характеристикой предельного состояния для конструкций, выполненных из традиционных строительных материалов (сталей, бетона, дерева) в обычных условиях эксплуатации. Объяснить процесс разрушения полимерных материалов, а иногда бетона и сталей в особых условиях эксплуатации только на основе критериев (6.3) - (6.6) невозможно.

Наблюдения за работой таких материалов показывают, что их прочность (предельное разрывное напряжение) в обычном традиционном понимании с течением времени уменьшается. Материал стареет и через какое-то время может разрушиться без каких-либо дополнительных внешних воздействий (например, часто наблюдаемые в быту разрушения пластмассовых шпонок книжных полок, пластмассовых кронштейнов).

Учет временного фактора при оценке прочности возможен на основе критериев долговременной прочности. Эти критерии также основываются на представлении о том, что любое твердое тело состоит из неразрушимых твердых частиц, соединенных связями, но процесс разрушения связей рассматривается во времени.

При оценке долговременной прочности основной характеристикой материала является кривая долговечности, которая определяет время до разрушения $\tau_{кр}$ при действии постоянного напряжения σ

$$\tau_{кр} = A \exp(-\alpha\sigma), \quad (6.10)$$

где A , α - константы, зависящие от свойств материала, которые определяются экспериментально. В зависимости от принятой при обработке данных эксперимента точности получают расчетные кривые долговечности, обеспечивающие требуемую надежность. В таблице 6.1 приведены значения A и α некоторых материалов.

Таблица 6.1

Константы кривой долговечности

Материал	α , МПа ⁻¹	A, час
При надежности 50 %		
Канаты: капроновые	0.060	$2 \cdot 10^6$
полипропиленовые	0.064	$3.8 \cdot 10^5$
Капрон литой	0.46	$2 \cdot 10^{11}$
Наполненная сажей резина	0.83	$2.5 \cdot 10^7$
Фосфористая бронза	1.25	$2 \cdot 10^{20}$
Нитроцеллюлоза	3.0	$1 \cdot 10^{13}$
Полистирол	3.1	$6.4 \cdot 10^9$
Целлулоид	3.8	$1 \cdot 10^{14}$
Пластифицированный поливинилхлорид	6.9	$6.3 \cdot 10^7$
При надежности 98 %		
Канаты: капроновые	0.060	$7.6 \cdot 10^4$
полипропиленовые	0.064	$9.4 \cdot 10^4$

В случае действия переменных напряжений в качестве характеристики предельного состояния вводится понятие *повреждаемости* ω , которая определяется как отношение количества поврежденных связей в сечении к их первоначальному количеству. Разрушение наступает при $\omega=1$. Одним из наиболее простых способов определения повреждаемости является способ линейного суммирования, составляющий основу критерия Бейли.

Согласно критерию Бейли каждое действующее напряжение σ_i за время своего действия t_i (рис.6.13) приводит к накоплению повреждаемости, величина которой определяется отношением $t_i / \tau_{kp i}$ ($\tau_{kp i}$ - долговечность, соответствующая напряжению σ_i , вычисляется по формуле (6.10)). Разрушение материала произойдет, когда сумма повреждаемостей достигнет единицы, то есть условие разрушения имеет вид

$$\sum (t_i / \tau_{kp i}) = 1. \quad (6.11)$$

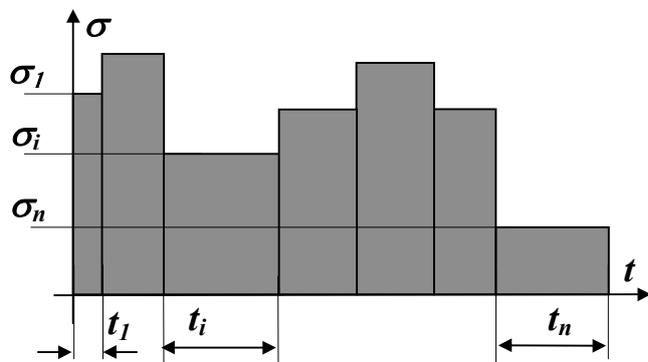


Рис. 6.13. Возможный график изменения напряжений во времени

Необходимо обратить внимание на то, что для оценки долговременной прочности требуется знать не только значения всех напряжений, действующих на протяжении

всего периода эксплуатации сооружения, но и время действия каждого из них. Таким образом, критерии длительной прочности, учитывающие особенности материала, дают ответ на вопрос о времени до разрушения, (долговечность или срок службы).

Если в процессе эксплуатации сооружения нагрузка (напряжение) не меняется, время до разрушения определяется непосредственно по формуле (6.10).

При действии переменных нагрузок процедура решения задачи может быть построена следующим образом:

определить в опасном сечении действующие за весь период эксплуатации напряжения σ ,

определить время действия каждого напряжения;

найти по формуле (6.10) долговечность, соответствующую каждому напряжению;

вычислить величину повреждаемости от каждого напряжения в отдельности $\omega_i = t_i / \tau_{kpi}$;

последовательно, начиная с ω_1 , произвести суммирование повреждаемостей. Разрушение наступит при $\sum \omega_i \geq 1$. Если сумма всех повреждаемостей $\sum \omega_i < 1$, разрушения не произойдет.

Если изменение нагрузки носит циклический характер (наиболее часто встречающаяся задача), срок службы C удобно определять количеством циклов (единицы времени могут быть любыми: часы, дни, годы). Для этого сначала определяется повреждаемость за один цикл

$\omega_{ц}$ (суммированием по формуле (6.11)), после чего вычисляется срок службы

$$C = 1 / \omega_{ц}. \quad (6.12)$$

6.5.1. Примеры определения долговечности

Пример 6.13. Определить с надежностью 98 % время до разрыва капронового каната диаметром $d=2.8$ см, к которому подвешен, как показано на рисунке 6.14, груз $P=60$ кН.



Решение. *Усилия в канате.* Канат работает на центральное растяжение

$$N = P = 60 \text{ кН.}$$

Напряжение

$$\sigma = N/A = 60 \cdot 4 / (\pi \cdot 2.8) = 95.5 \text{ МПа.}$$

Время до разрушения по закону (6.10) при $A = 76000$ часов и $\alpha = 0.06 \text{ МПа}^{-1}$ (см. табл.6.1)

$$\tau_{кр} = 76000 \exp(-0.06 \cdot 95.5) = 246 \text{ часов} \cong 10 \text{ дней.}$$

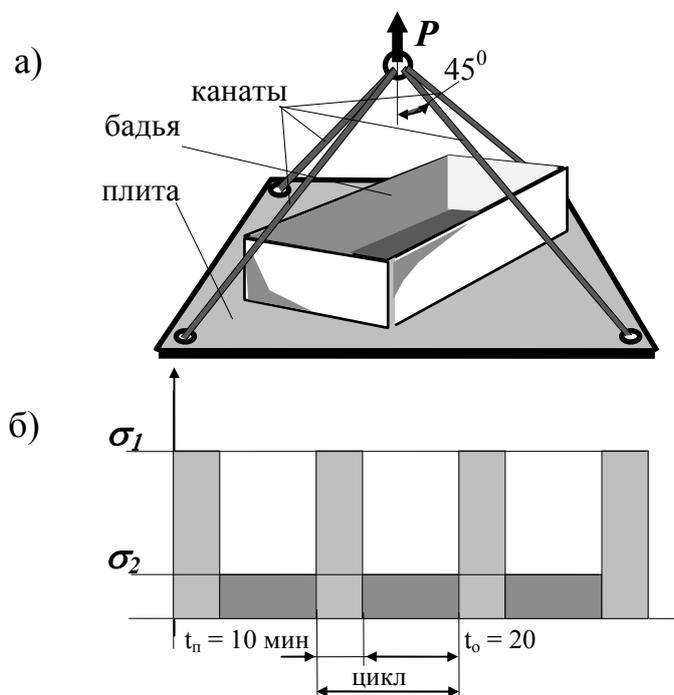


Рис. 6.15. Схема грузового устройства (а) и режим его работы (б) - изменение напряжений в канате во времени

Пример 6.14. На строительной площадке для подъема бадьи с раствором весом 60 кН используется устройство, состоящее из плиты весом 20 кН с четырьмя капроновыми подъемными канатами диаметром 2 см каждый (рис. 6.15). Режим работы устройства: 10 мин (0.17 ч) - подъем груза, 20 мин (0.33 ч) - опускание пустой плиты. Определить с надежностью 50 % через какое время потребуется замена канатов.

Решение. Работа канатов в грузоподъемном устройстве происходит в циклическом режиме. Если t_n - время подъема груза, t_o - время опускания пустой площадки, то время одного цикла (рис. 6.15)

$$t_{ц} = t_n + t_o = 0.17 + 0.33 = 0.50 \text{ часа.}$$

Чтобы определить σ_1 и σ_2 , вычислим усилия в канате:

от веса плиты

$$P_{плиты} = 20 / (4 \cdot \cos 45^\circ) = 7.07 \text{ кН,}$$

от груза (от бадьи с раствором)

$$P_{бадьи} = 60 / (4 \cdot \cos 45^\circ) = 21.21 \text{ кН.}$$

Тогда *напряжения*

от плиты и бадьи

$$\sigma_1 = (P_{плиты} + P_{бадьи}) / (\pi \cdot r^2) = (7.14 + 21.4) \cdot 10 / (3.14 \cdot 1^2) = 90.1 \text{ МПа,}$$

от плиты

$$\sigma_2 = P_{плиты} / (\pi \cdot r^2) = 7.14 \cdot 10 / (3.14 \cdot 1) = 22.5 \text{ МПа.}$$

Долговечности, соответствующие напряжениям σ_1 и σ_2 , определяем по формуле (6.10) с учетом $A = 2 \cdot 10$ ч, $\alpha = 0.06$ МПа (см. табл.6.1):

$$\tau_{кр1} = 2 \cdot 10^6 \cdot \exp(-0.06 \cdot 90.1) = 8979 \text{ часов,}$$

$$\tau_{кр2} = 2 \cdot 10^6 \cdot \exp(-0.06 \cdot 22.5) = 518480 \text{ часов.}$$

Повреждаемость за один цикл

$$\omega = 0.17/8979 + 0.33/518480 = 1.96 \cdot 10^5 .$$

Срок службы

$$C = 1/\omega = 1/1.96 \cdot 10 = 51020 \text{ циклов,}$$

с учетом того, что время одного цикла 0.5 часа,

$$C = 25510 \text{ часов} = 2.9 \text{ года.}$$

Задачи проектирования на основе критериев долговременной прочности сводятся к подбору сечений несущих элементов (регулирование напряжений) или выбору материалов, обеспечивающих надежную работу сооружения в течение заданного времени. В любом случае задачу проектирования приходится решать подбором.

Пример 6.15. Груз $Q = 200$ кН подвешен на двух канатах диаметром 6 см каждый, как показано на рисунке 6.16. Подобрать

материал каната, если необходимо обеспечить время эксплуатации не менее пяти лет с надежностью 50%.

Решение. Усилие в канате

$$N = 200 / (2 \cdot \cos \alpha) = 200 / (2 \cdot 0.5547) = 180.3 \text{ кН.}$$

Напряжение

$$\sigma = N/A = 180.3 / (\pi \cdot 3^2) = 63.8 \text{ МПа.}$$

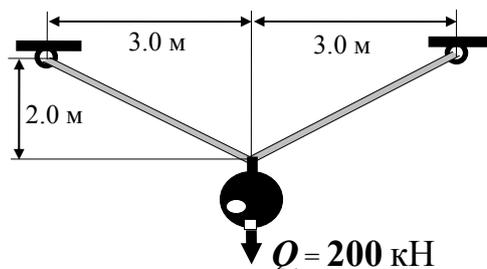


Рис. 6.16. Подвеска груза на полимерном канате

Подбор материала осуществим на основе соотношения (6.10), принимая характеристики канатов по таблице 6.1. Для капрона $A = 2 \cdot 10^6$ часов, $\alpha = 0.06 \text{ МПа}^{-1}$,

$$t_{кр} = 2 \cdot 10^6 \cdot \exp(-0.06 \cdot 63.16) = 43506 \text{ часов} = 5 \text{ лет,}$$

то есть применение капроновых канатов обеспечит требуемое время эксплуатации с заданной надежностью.