

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ

Дальневосточный государственный технический университет  
(ДВГУ им. В.В. Куйбышева)

Кафедра теории сооружений



# ПРЕДЕЛЬНОЕ РАВНОВЕСИЕ СПЛОШНЫХ И СЫПУЧИХ СРЕД

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К ОСВОЕНИЮ ДИСЦИПЛИНЫ

для обучающихся в магистратуре по направлению  
550101 «Теория и проектирование зданий и сооружений»

Составил: к.т.н., доцент Н.Я. Цимбельман



Владивосток – 2010

Одобрено научно-методическим советом университета

УДК 624.131.5

Предельное равновесие сплошных и сыпучих сред: методические указания / сост. Н.Я. Цимбельман. – Владивосток: Изд-во ДВГТУ, 2010. – 43 с.

Методические указания разработаны в соответствии с государственным образовательным стандартом высшего профессионального образования по направлению подготовки магистров техники и технологии, и рабочей учебной программой по дисциплине «Предельное равновесие сплошных и сыпучих сред».

Печатается с оригинал-макета, подготовленного автором.

Редактор \_\_\_\_\_  
Техн. редактор \_\_\_\_\_

Подписано в печать \_\_\_\_\_ . Формат 60x84/16  
Усл. печ. л. 2,7. Уч.- изд. л. 1,6.  
Тираж 100 экз. Заказ

---

Издательство ДВГТУ, 690950, Владивосток, ул. Пушкинская, 10  
Типография издательства ДВГТУ, 690950, Владивосток, ул. Пушкинская, 10

© Н.Я. Цимбельман, 2009  
© ДВГТУ, изд-во ДВГТУ, 2010

## СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ.....	4
I. РАСЧЁТНЫЕ МОДЕЛИ СПЛОШНЫХ И СЫПУЧИХ СРЕД .....	5
II. МЕТОДИКА РАСЧЁТА ДАВЛЕНИЯ СЫПУЧЕГО ТЕЛА НА ОГРАЖДЕНИЯ .....	10
2.1. Теория Кулона .....	11
2. 2. Теоремы Ребхана .....	16
2. 3. Построение Понселе .....	21
III. ЗАДАЧИ НА ОПРЕДЕЛЕНИЕ ДАВЛЕНИЯ СЫПУЧЕГО ТЕЛА НА ОГРАЖДЕНИЕ .....	26
IV. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ДАВЛЕНИЯ ПО ВЫСОТЕ ОГРАЖДЕНИЯ .....	29
V. РАСЧЁТ ПАССИВНОГО ДАВЛЕНИЯ.....	31
VI. РАСЧЁТ ДАВЛЕНИЯ СЫПУЧЕГО ТЕЛА НА ОГРАЖДЕНИЕ ЛОМАНОВОГО ОЧЕРТАНИЯ .....	34
ЛИТЕРАТУРА .....	37
ПРИЛОЖЕНИЕ 1 ПРИМЕР ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ .....	38

## ВВЕДЕНИЕ

Методические указания направлены на освоение магистрами строительных специальностей практических задач курса «Пределное равновесие сплошных и сыпучих сред». В указаниях кратко представлены теоретические предпосылки, на основе которых сформированы используемые расчетные методы: теория Кулона, теоремы Ребхана, построение Понселе.

Практические задачи, решаемые в методических указаниях:

1. Определение активного давления сыпучего тела на вертикальные и наклонные ограждения. Отдельно рассмотрены частные случаи, когда поверхность земли сама представляет собой плоскость естественного откоса, а также когда поверхность сыпучего тела составляет с задней гранью стены угол  $\varphi + \varphi_0$ ;
2. Определение точки приложения равнодействующей активного давления по высоте ограждения;
3. Определение активного давления сыпучего тела на ограждения ломаного очертания;
4. Определение пассивного давления сыпучего тела на вертикальные и наклонные ограждения;
5. Определение пассивного давления сыпучего тела на ограждения ломаного очертания.

Подробно приведён алгоритм решения каждой поставленной задачи, заданы реальные размеры сооружений и параметры сыпучего тела обратной засыпки. Решение выполнено графически, для чего указания снабжены соответствующими иллюстрациями. Для сравнения приведено также аналитическое решение задач. Приведены задания для самостоятельного решения.

## I. РАСЧЁТНЫЕ МОДЕЛИ СПЛОШНЫХ И СЫПУЧИХ СРЕД

По своим основным физическим свойствам все тела разделяются на твёрдые, жидкие и тела, занимающие промежуточное положение между твёрдыми телами и жидкостями: это тела, которые состоят из множества отдельных более или менее однородных частиц. Такие тела называют сыпучими телами или просто *сыпучими*.

Сыпучие тела отличаются от твёрдых:

- а) подвижностью частиц;
- б) способностью сохранять форму только в известных пределах;
- в) свойством оказывать давление на ограждающую поверхность;
- г) неспособностью сопротивляться растяжению;

д) тем, что их способность сопротивляться сдвигающим усилиям находится в зависимости от действия сжимающих сил.

\* Жидкости отличаются от сыпучих тел большей подвижностью частиц, отсутствием постоянной формы и еще меньшей способностью сопротивляться сдвигающим усилиям.

Существуют различные модели для описания напряженного состояния указанных типов тел. К числу общих свойств, которые принимаются в моделях всех тел в большинстве дисциплин, относятся сплошность, однородность и изотропность [3].

Для сыпучих же тел применяют как «модель сплошной среды», предполагающую непрерывность строения тела, так и «модель дискретной среды» (когда тело принимается состоящим из отдельных частиц с учётом связей между ними).

В дальнейшем рассмотрим задачи о предельном равновесии различных сред на примере сред сыпучих, при этом рассмотрим возможность применения некоторых моделей для описания напряженного состояния сыпучих сред.

### *Задачи механики сыпучих сред*

Строительная механика сыпучих сред содержит изложение способов определения давления и сопротивления сыпучей среды при различных воздействиях на него со стороны сооружения и нагрузки. В механике сыпучих сред различают два основных направления [6]:

1. Первое характеризуется введением упрощающих допущений, которые позволяют решать задачу, не прибегая к сложному математическому аппарату;

2. Второе содержит большую математическую строгость решения.

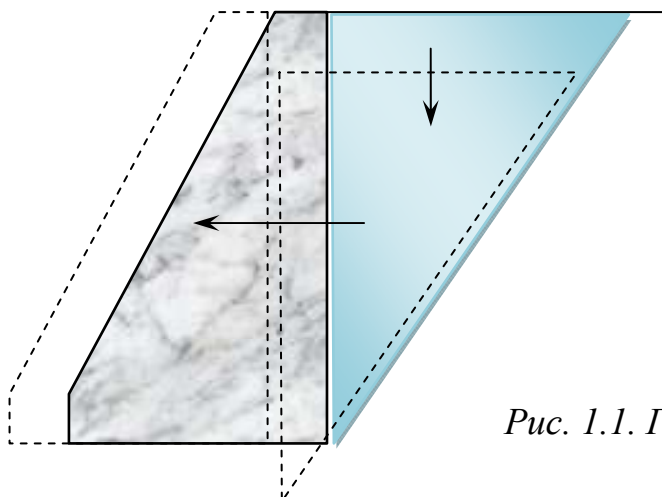
Первое из указанных направлений в механике сыпучих тел содержит теории, построенные на допущении о той или иной поверхности скольжения, образующейся в толще сыпучего тела при его разрушении. Второе направление называют также теорией сыпучей среды, которая исходит из дифференциальных уравнений равновесия и условий состояния для каждой точки рассматриваемого объёма сыпучей среды [13].

Граница между этими двумя направлениями – нестабильна. Оба эти направления развиваются параллельно, существуют также промежуточные решения.

При решении задач предельного равновесия по существу рассматривается стадия разрушения сыпучего тела, поэтому в механике твёрдых деформируемых тел этой категории задач соответствуют задачи, исследуемые в теории предельного равновесия и в теории пластичности [3, 6]. При этом решение оказывается в большинстве случаев возможным без рассмотрения деформаций и перемещений сыпучего тела.

При этом в качестве основных механических характеристик среды в расчётные формулы вводят значения объёмной массы (удельный вес  $\gamma$ ,  $\text{кН/м}^3$ ), внутреннего трения (угол внутреннего трения  $\varphi$ ,<sup>0</sup>) и сцепления (удельное сцепление  $c$ ,  $\text{кПа}$ ). Методы определения этих характеристик рассматриваются в курсе Механики грунтов [16].

Типичной задачей этой категории будет задача об определении давления сыпучей среды на подпорные стены различных типов. Подпорная стена при этом предполагается получившей незначительное смещение, вследствие которого сыпучее тело, поддерживаемое подпорной стеной, приходит в движение (рис. 1.1.).



*Рис. 1.1. Гипотеза разрушения системы «подпорная стенка – грунт»*

Механика сыпучих сред во многом опирается на опыты: только из опыта могут быть получены для разных сыпучих сред числовые значения физико-механических характеристик ( $\gamma$ ,  $\varphi$ ,  $c$  – см. выше), входящих в расчётные формулы.

### ***Основные расчётные модели***

При разработке методов расчёта грунтовой среды (математическое описание наблюдаемых в ней процессов) приходится прибегать к схематизации рассматриваемых явлений и свойств грунтов. При этом в зависимости от поставленной задачи выделяют наиболее важные для неё факторы, а все другие не учитывают. В результате создаётся расчётная модель или расчётная схема грунта [5]. Рассмотрим основные расчётные схемы сыпучей среды:

## 1. Модель дискретной среды.

Вообще говоря, грунт является дискретной средой, состоящей из отдельных частиц, поэтому очень близкой к действительности оказывается модель, описывающая взаимодействие отдельных частиц с учётом связей между ними.

Пример дискретной модели: система взаимодействующих шаров или цилиндров (Г.И. Покровский, И.И. Кандауров [5]) – рис. 1.2. В ряде случаев эта модель применялась к крупнообломочным грунтам, например, при рассмотрении напряженного состояния каменно-набросных плотин.

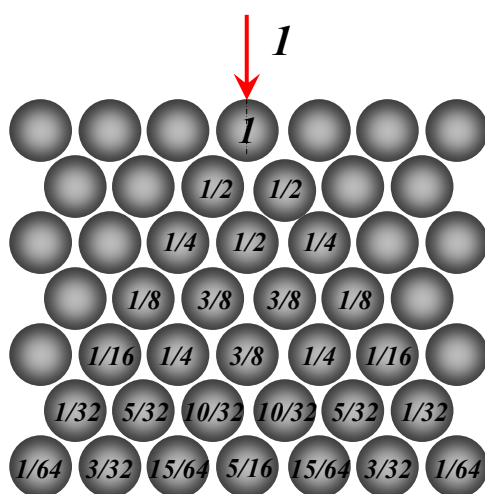


Рис. 1.2. Модель дискретной среды. Гипотеза долевого распределения нагрузки между отдельными элементами

## 2. Модель сплошной среды.

В рамках этой модели не рассматривается поведение отдельной частицы, а принимается, что составляющие грунта заполняют рассматриваемую часть пространства непрерывно. Непрерывность (континуум) строения такого идеализированного тела сохраняется в процессе его деформирования.

Такая концепция сплошности вещества является основным постулатом механики сплошной среды и обеспечивает *единый подход к изучению поведения твёрдых тел, сыпучих тел, жидкостей и газов*. Применение модели сплошной среды к сыпучим телам позволило широко использовать



имеющиеся решения теории упругости, теории пластичности и других разделов механики сплошных сред [3].

Однако, применяя к сыпучим телам концепцию сплошности, необходимо выполнять требование, чтобы принимаемые в качестве малых элементы среды имели размеры много меньше наименьших характерных размеров исследуемого пространства:

$$\sqrt[3]{\Delta V} \leq h, b, \dots, \quad (1.1)$$

где  $\Delta V$  – элементарный, бесконечно малый объём грунта,  $h$  – высота откоса (подпора),  $b$  – ширина подошвы фундамента и т.д.

В то же время для исключения влияния особенностей отдельной конкретной частицы сыпучего тела необходимо обеспечить условие:

$$\sqrt[3]{\Delta V} \gg d_{\max}, \quad (1.2)$$

где  $d_{\max}$  – диаметр максимальной по крупности частицы сыпучего тела.

Известно, что для большинства грунтов, являющихся основанием или внешней средой для реальных сооружений, указанные условия (1.1 и 1.2) – выполняются, что позволяет вполне обоснованно применять модель сплошной среды для описания их напряженного состояния.

## II. МЕТОДИКА РАСЧЕТА ДАВЛЕНИЯ СЫПУЧЕГО ТЕЛА НА ОГРАЖДЕНИЯ

*«Задача о распределении напряжений внутри сыпучего тела и на его поверхности соприкосновения с другими телами принадлежит к числу труднейших задач строительной механики» /Рабинович И.М./ [9].*

Сложность и неопределённость задачи состоят в том, что частицы, образующие упругое тело, имеют различную величину и форму, различную твердость и шероховатость; что между ними действуют силы трения, которые, в свою очередь, меняются в зависимости от степени влажности сыпучего тела. Кроме сил трения, действуют еще более неопределенные силы прилипания (сцепления).

Значительные изменения величины и направления давления земли вызывают: способ и последовательность засыпки земли позади ограждения, естественное и искусственное трамбование, случайные или систематические сотрясения грунта, малейшие осадки и перемещения стенки под влиянием собственного веса.

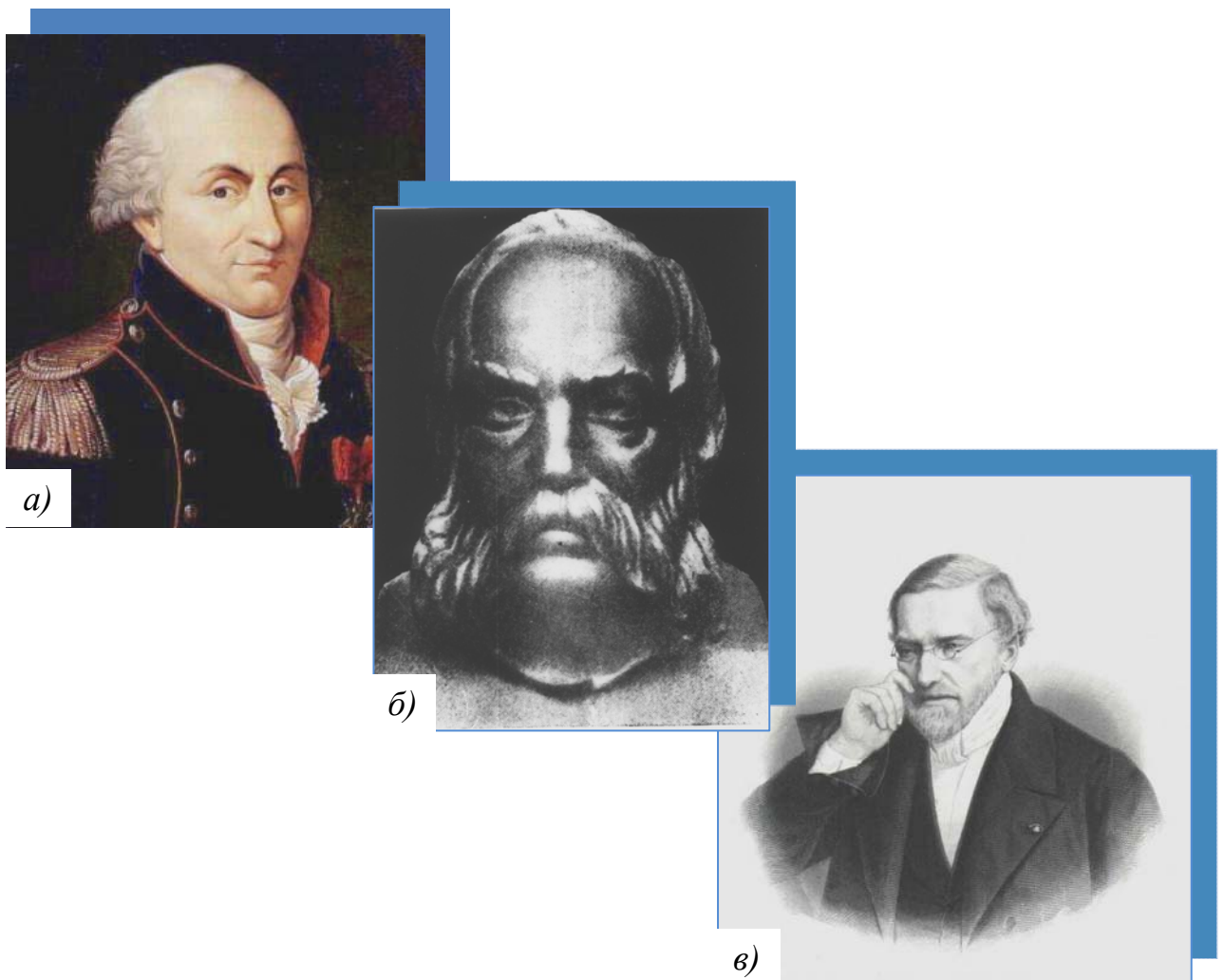
Становится ясно, насколько трудно в данном случае разработать приемлемые теории расчета. Поэтому все теории, предложенные до настоящего времени, оперируют с идеальным сыпучим телом (моделью), наделенным некоторыми гипотетическими однородными свойствами.

Существующие в настоящее время основные методы расчета давления сыпучего тела на ограждения основаны на предложенной в восемнадцатом веке теории Ш.О. Кулона (рис. 2.1, а), вошедшей в историю под кратким названием «теория Кулона». Далее рассмотрим, в чём она состоит.

## 2.1. ТЕОРИЯ КУЛОНА

Вначале перечислим упрощающие гипотезы, на которых эта теория основана:

1. Сыпучее тело (земляная масса) рассматривается как однородная сплошная среда, способная воспринимать только сжимающие и сдвигающие усилия;



*Рис. 2.1. Учёные – инженеры, разработавшие практические методы расчёта давления сыпучего тела на ограждения*

*а - Кулон Шарль Огюстен (1736 - 1806): французский военный инженер. В 1781 г. сформулировал законы сухого трения;  
б - Ребхан Георг (1824 - 1892): Венский профессор, инженер – строитель;  
в - Понселе Жан Виктор (1788-1867): французский математик и инженер. Заложил основы проективной геометрии*

2. Принимается, что при равновесии результирующее напряжение на любой площадке внутри сыпучего тела может отклоняться от нормали к площадке на угол, не превышающий некоторой величины  $\alpha$ , которая зависит от физических свойств данного сыпучего тела. (Мы уже знаем, что этот угол равен углу внутреннего трения  $\varphi$ );

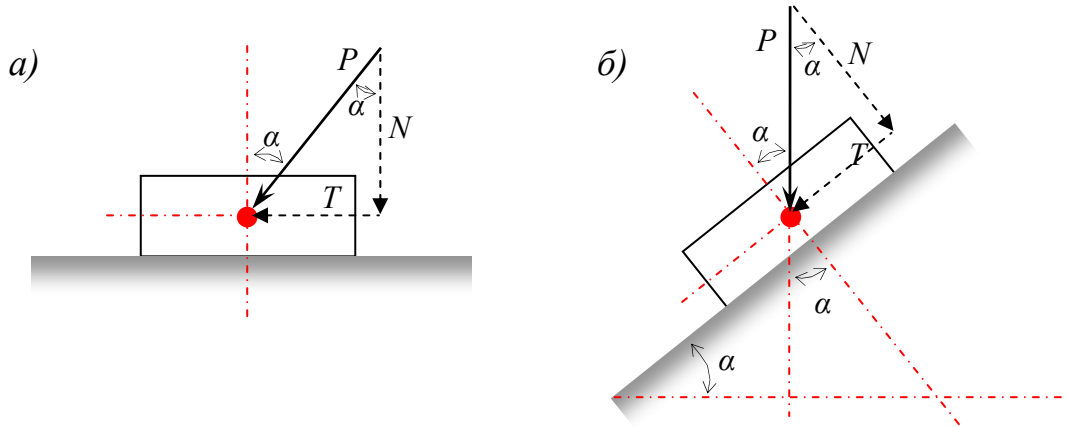


Рис. 2.2

Схема к оценке состояния равновесия тела на плоскости а – горизонтальная плоскость; б – наклонная плоскость

\* Если на тело, способное скользить по плоскости, действует сила  $P$ , наклоненная к нормали по углом  $\alpha$ , то нормальная составляющая имеет величину  $N = P \cdot \cos \alpha$ , сила трения из условия равновесия не может превысить величины  $N \cdot f^1 = P \cdot f \cdot \cos \alpha$  (рис. 2.2). Кроме того, сдвигающая сила равна  $T = P \cdot \sin \alpha$ . До тех пор, пока  $T < N \cdot f$  ( $P \cdot \sin \alpha < P \cdot f \cdot \cos \alpha$ ), и, или:  $\operatorname{tg} \alpha < f$ , тело будет только прижиматься к плоскости, но не сможет скользить. То значение угла  $\alpha$ , при котором неравенство переходит в равенство, будет предельным для состояния равновесия ( $\alpha = \varphi$ ). При дальнейшем увеличении этого угла начнётся скольжение;

3. Предполагается, что стенка, уступая давлению сыпучего тела, начинает отодвигаться и определяется не то давление, которое она испытывает при обычных условиях, а то предельное, которое отвечает первому мгновению процесса отодвигания стенки. Кулон считал, что

<sup>1</sup> Здесь  $f$  – коэффициент трения,  $f = \operatorname{tg} \varphi$ .

давление на стенку при обычных условиях не может превысить того, которое отвечает моменту нарушения равновесия и началу обрушения;

4. Принимается следующая гипотеза разрушения системы стенка-грунт: от сыпучего тела отделяется клин, ограниченный с одной стороны поверхностью подпорной стенки, а с другой стороны – плоскостью, проходящей через основание стенки (см. рис. 1.1). Эта плоскость называется плоскостью обрушения или *плоскостью скольжения*, а клин – *призмой обрушения*. Сам клин рассматривается при этом как абсолютно твёрдое тело;

5. Задача решается в условиях «плоской задачи»: предполагается, что стенка имеет неограниченную длину, и что профиль земляной массы и все прочие условия остаются по длине стенки постоянными. Таким образом, расчет ведется для участка стенки длиной  $l_m$ . Призма обрушения имеет при этом высоту, также равную единице ( $l_m$ ).

Наметив ограничения, мы вплотную подошли к сути теории.

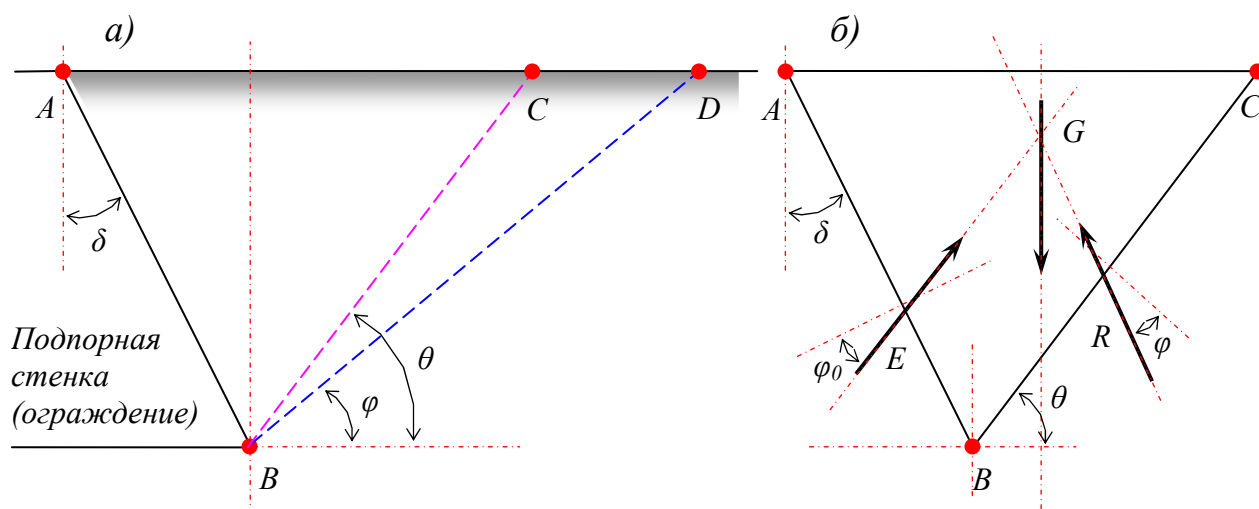


Рис. 2.3. Схема к определению давления сыпучего тела на ограждение а – формирование призмы (клина) обрушения; б – призма обрушения, отделённая от внешней среды

1. рассмотрим давление, оказываемое на некоторый участок  $AB$  подпорной стенки (рис. 2.3);
2. проведем плоскость естественного откоса  $BD$ ;
3. вообразим, что линия  $BC$  есть след плоскости обрушения, угол ее наклона к горизонту обозначим через  $\theta$ ;



8. Три силы –  $E$ ,  $R$  и  $G$  находятся в равновесии, если они пересекаются в одной точке и треугольник сил – замкнут (рис. 2.4,б). Нас интересует сила  $E$ , которая противоположна давлению земли на ограждение;

9. Далее по теореме синусов:

$$\frac{E}{G} = \frac{\sin(\theta - \varphi)}{\sin(90^\circ + \delta + \varphi_0 - \theta + \varphi)} = \frac{\sin(\theta - \varphi)}{\cos(\theta - \delta - \varphi_0 - \varphi)}; \quad (2.1)$$

$$E = G \cdot \frac{\sin(\theta - \varphi)}{\cos(\theta - \delta - \varphi_0 - \varphi)}; \quad (2.2)$$

10. Однако в правую часть выражения (2.2) входит неизвестный угол  $\theta$ , который определяет также и вес призмы обрушения  $G$ . То есть  $\theta$  является единственной независимой переменной в этой формуле. Каждому значению этого угла соответствует новое положение плоскости обрушения, новое значение веса призмы  $G$  и новое значение силы  $E$ . Необходимо определить то значение  $\theta$ , при котором величина  $E$  достигает максимума. Такое значение существует, т.к. при совпадении линий  $BC$  и  $BD$  (когда  $\theta = \varphi$ ) призма обрушения лежит на естественном откосе и, являясь абсолютно твердым телом (см. гипотезы), не давит на стенку. В то же время при совпадении линии  $BC$  с  $AB$  призма обрушения не существует, следовательно  $G = 0$  и  $E = 0$ . То есть искомая точка  $C$  лежит где-то между точками  $A$  и  $D$ .

11. Эта точка может быть найдена путем нескольких попыток (подбором).

Георг Ребхан предложил также ввести дополнительное условие максимума:

$$\frac{dE}{d\theta} = 0. \quad (2.3)$$

Далее рассмотрим несколько удачных примеров дальнейшего развития теории Кулона.

## 2.2. ТЕОРЕМЫ РЕБХАНА

Несколько интересных работ в направлении развития теории Кулона выполнены Георгом Ребханом (рис. 2.1, б).

Мы остановились на том, что уравнение определения давления сыпучего тела на ограждение содержит неизвестный угол  $\theta$ , который определяет также и вес призмы обрушения  $G$ . То есть  $\theta$  является единственной независимой переменной в этой формуле. Ш. Кулон предложил принять угол наклона плоскости скольжения таким, чтобы активное давление на стену было наибольшим. Задача решается перебором, но более обоснованно её можно решить, введя недостающее уравнение (2.3).

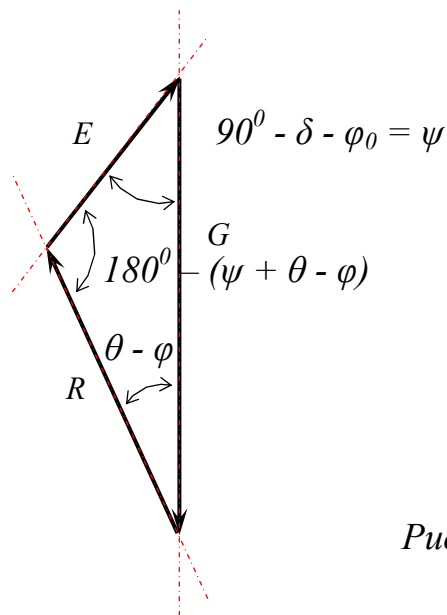


Рис. 2.6. Треугольник сил

Несколько изменим на силовом треугольнике обозначения углов (рис. 2.6), чтобы облегчить дальнейшие преобразования.

Первоначально формула выглядела так:

$$\frac{E}{G} = \frac{\sin(\theta - \varphi)}{\sin(90^\circ + \delta + \varphi_0 - \theta + \varphi)}; \quad (2.4)$$

Немного по-другому преобразуем:



$$\frac{E}{G} = \frac{\sin(\theta - \varphi)}{\sin(180^\circ - (\psi + \theta - \varphi))}; \quad (2.5)$$

с учетом того, что  $\sin(180^\circ - (\psi + \theta - \varphi)) = \sin(\psi + \theta - \varphi)$ , получим:

$$E = G \frac{\sin(\theta - \varphi)}{\sin(\psi + \theta - \varphi)}; \quad (2.6)$$

Итак, продифференцируем формулу по  $\theta$  (согласно условию 2.3) и приравняем производную нулю.

$$\frac{dE}{d\theta} = \frac{dG}{d\theta} \left( \frac{\sin(\theta - \varphi)}{\sin(\psi + \theta - \varphi)} \right) + G \left( \frac{\sin(\theta - \varphi)}{\sin(\psi + \theta - \varphi)} \right)' = 0; \quad (2.7)$$

$$\left( \frac{\sin(\theta - \varphi)}{\sin(\psi + \theta - \varphi)} \right)' = \frac{\sin(\psi + \theta - \varphi) \cdot \cos(\theta - \varphi) - \sin(\theta - \varphi) \cdot \cos(\psi + \theta - \varphi)}{\sin^2(\psi + \theta - \varphi)}; \quad (2.8)$$

ПОДСТАВИМ:

$$\frac{dG}{d\theta} \left( \frac{\sin(\theta - \varphi)}{\sin(\psi + \theta - \varphi)} \right) + G \frac{\sin(\psi + \theta - \varphi) \cdot \cos(\theta - \varphi) - \sin(\theta - \varphi) \cdot \cos(\psi + \theta - \varphi)}{\sin^2(\psi + \theta - \varphi)} = 0; \quad (2.9)$$

$$G = - \frac{dG}{d\theta} \left( \frac{\sin(\theta - \varphi) \cdot \sin^2(\psi + \theta - \varphi)}{\sin(\psi + \theta - \varphi) \cdot (\sin(\psi + \theta - \varphi) \cdot \cos(\theta - \varphi) - \sin(\theta - \varphi) \cdot \cos(\psi + \theta - \varphi))} \right); \quad (2.10)$$

в результате:

$$G = - \frac{dG}{d\theta} \left( \frac{\sin(\theta - \varphi) \cdot \sin(\psi + \theta - \varphi)}{\sin(\psi + \theta - \varphi - \theta + \varphi)} \right); \quad (2.11)$$



Знак минус показывает, что при возрастании угла  $\theta$  вес  $G$  убывает.

Продолжим построение. Далее предлагается из точки  $C$  провести линию  $CE$  под углом  $\psi$  к линии  $BD$ . Получился треугольник  $BCE$ . Из треугольника  $BCE$  видно, что:

$$\frac{BE}{BC} = \frac{\sin(180^\circ - \psi - \theta + \varphi)}{\sin \psi} = \frac{\sin(\psi + \theta - \varphi)}{\sin \psi}. \quad (2.15)$$

Подставим полученные зависимости (2.14 и 2.15) в основную формулу (2.12):

$$G = \frac{1}{2} \cdot \gamma \cdot BC^2 \left( \frac{\sin(\theta - \varphi) \cdot BE}{BC} \right) = \frac{1}{2} \cdot \gamma \cdot BC \cdot BE \cdot \sin(\theta - \varphi), \quad (2.16)$$

преобразуем:

$$G = \frac{1}{2} \cdot \gamma \cdot BC \cdot BE \cdot \sin(\theta - \varphi) = \frac{1}{2} \cdot \gamma \cdot BC \cdot CE = \gamma \cdot S_{mpBCE}, \quad (2.17)$$

при этом вспомним, что:

$$G = \gamma \cdot S_{mpABC}, \quad (2.18)$$

то есть из условия определения максимального давления, действующего на стенку, получаем:

$$S_{mpBCE} = S_{mpABC}. \quad (2.19)$$

Эта теорема известна под названием «Первая теорема Ребхана», и сформулировать её можно так:

Наиболее опасная плоскость обрушения  $BC$  проходит таким образом, что площадь основания  $ABC$  призмы обрушения равновелика площади треугольника  $BCE$ . Пользуясь этой теоремой, можно после немногих попыток найти правильное положение точки  $C$ .

Для нахождения величины давления  $E$  продолжим построение (рис. 2.7).

Проведем окружность радиусом  $CE$  с центром в точке  $E$ , и сделаем на линии  $BD$  засечку в точке  $F$ . Соединим точку  $C$  с точкой  $F$ . Определим площадь треугольника  $CEF$ , приняв во внимание, что он имеет общее основание с треугольником  $BCE$  (площади треугольников с общей высотой относятся одна к другой как их основания):

$$\frac{S_{mpECF}}{S_{mpBCE}} = \frac{FE}{BE} = \frac{CE}{BE} = \frac{\sin(\theta - \varphi)}{\sin(\psi + \theta - \varphi)}, \quad (2.20)$$

отсюда:

$$S_{mpECF} = S_{mpBCE} \cdot \frac{\sin(\theta - \varphi)}{\sin(\psi + \theta - \varphi)}, \quad (2.21)$$

вспомним, что  $G = \gamma \cdot S_{mpBCE}$  (см. 2.17), и найдём:

$$\gamma \cdot S_{mpECF} = \gamma \cdot S_{mpBCE} \cdot \frac{\sin(\theta - \varphi)}{\sin(\psi + \theta - \varphi)}, \quad (2.22)$$

или

$$\gamma \cdot S_{mpECF} = G \cdot \frac{\sin(\theta - \varphi)}{\sin(\psi + \theta - \varphi)} = E, \text{ то есть } E = \gamma \cdot S_{mpECF}. \quad (2.23)$$

В этом заключается вторая изящная теорема Ребхана, которую сформулируем так:

*Наибольшее давление  $E$  равно площади треугольника  $ECF$ , умноженной на объёмный вес материала.* Треугольник  $ECF$  носит название «треугольника Ребхана».

### 2.3. ПОСТРОЕНИЕ ПОНСЕЛЕ

Мы рассмотрели теоремы Г. Ребхана, которые помогают построить другие графические способы определения положения опасной поверхности скольжения и величины давления грунта на стенку.

Французский ученый Ж. Понселе (рис. 2.1, в) предложил для случая, когда поверхность земли представляет собой плоскость, определить наибольшее давление сразу, без попыток. Для этого разовьём предложенное ранее построение.

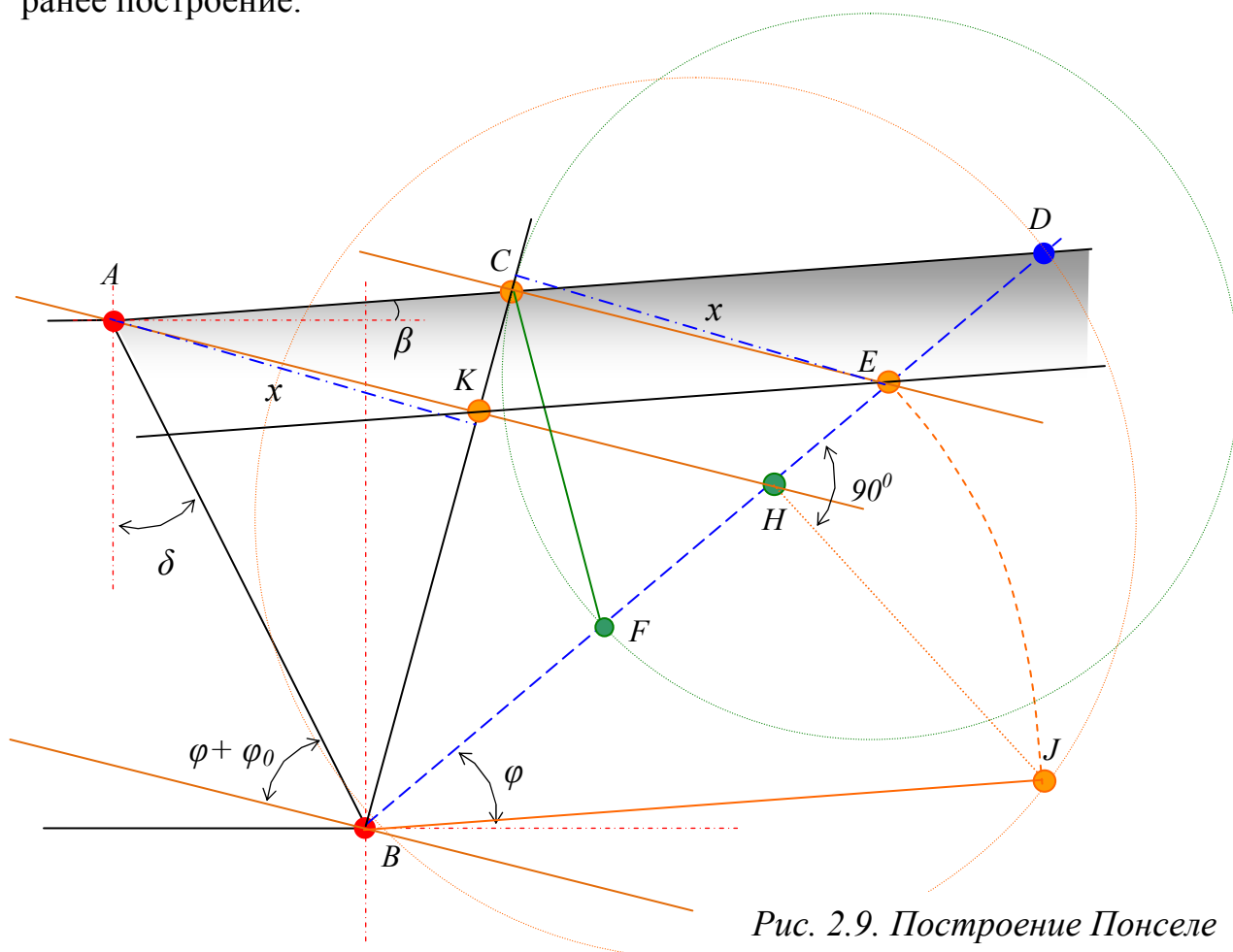


Рис. 2.9. Построение Понселе

1. Проводим так называемую «основную линию» под углом  $\varphi + \varphi_0$  к задней грани стенки (рис. 2.9);
2. Проводим линию  $BD$  под углом внутреннего трения  $\varphi$  к горизонту до пересечения с поверхностью сыпучего тела;
3. На отрезке  $BD$  как на диаметре построим окружность или полуокружность;
4. Из точки  $A$  проводим прямую  $AH$ , параллельную основной линии до пересечения с линией  $BD$  в точке  $H$ ;
5. Восстановить перпендикуляр в точке  $H$  к диаметру до пересечения с полуокружностью в точке  $J$ ;
6. Провести окружность радиусом  $BJ$ , и в месте пересечения с линией  $BD$  сделать засечку в точке  $E$ ;
7. Проводим прямую  $EC$  параллельно основной линии до пересечения с поверхностью засыпки  $AD$ . Прямая  $CB$  является изображением искомой плоскости обрушения;
8. Далее строится треугольник  $CEF$  Ребхана, который служит для определения наибольшего давления (см. вторую теорему Ребхана). Попробуем обосновать такое построение.

Хорда  $BJ$  будет среднепропорциональной между диаметром  $BD$  и прилегающим отрезком  $BH$ ;

$$BJ^2 = BD \cdot BH, \text{ при этом } BJ = BE,$$

$$BE^2 = BD \cdot BH; \text{ то есть (разделим на } BE \cdot BH),$$

$$BE/BH = BD/BE.$$

Через точку  $H$  проведём линию, параллельную основной линии и обозначим на её пересечении с прямой  $BC$  точку  $K$ .

$$\text{Из подобия треугольников } BCE \text{ и } BKH: BC/BK = BE/BH;$$

*\*Третий признак подобия треугольников: две стороны одного треугольника пропорциональны двум сторонам другого треугольника, а заключенные между ними углы – равны.*



Точка  $D$  уходит в бесконечность, построение окружности становится невозможным. В этом случае треугольник Ребхана остается без изменения при любом наклоне плоскости скольжения  $BC$ . То есть построить треугольник  $FCE$  можно без помощи окружности с радиусом  $BD$  (точка  $E$  выбирается произвольно на линии естественного откоса –  $E$  или  $E'$  на рис. 2.10). При этом сползающей призмой будет весь бесконечно большой объём грунта, заключенный между двумя параллельными плоскостями.

2. Случай, когда поверхность сыпучего тела составляет с задней гранью стены угол  $\varphi + \varphi_0$ . Точки  $D$  и  $E$  совпадают (рис. 2.11).

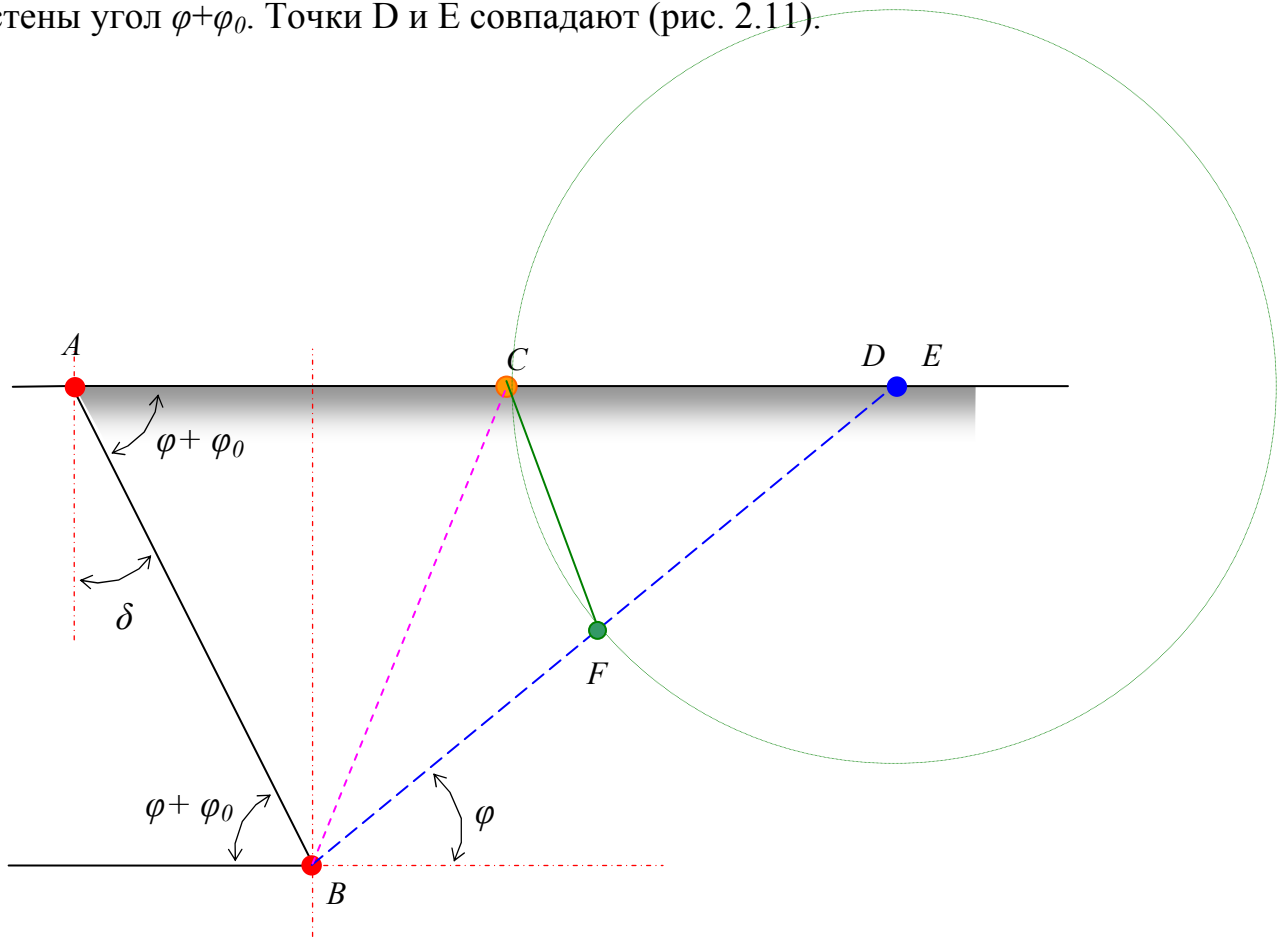


Рис. 2.11. Построение Понселе для случая, когда поверхность сыпучего тела составляет с задней гранью стены угол  $\varphi + \varphi_0$

Однако из первой теоремы Ребхана вытекает (см. стр. 20), что в этом случае плоскость обрушения совпадает с медианой треугольника  $ABD(E)$  (площади треугольников  $ABC$  и  $BCE$  должны быть равны). То есть, для нахождения точки  $C$  достаточно разделить отрезок  $AD$  пополам.



Переведя построение Понселе «на язык анализа», можно определить давление сыпучего тела на ограждение аналитическим путем. В результате основная формула (2.24) преобразуется в вид (2.25).

$$E = G \frac{\sin(\theta - \varphi)}{\sin(\psi + \theta - \varphi)} \quad (2.24)$$

$$E = \frac{1}{2} \gamma h^2 \left( \frac{\cos^2(\varphi - \delta)}{\left[ 1 + \sqrt{\frac{\sin(\varphi + \varphi_0) \sin(\varphi - \beta)}{\sin \psi \cos(\beta - \delta)}} \right]^2 \sin \psi \cos^2 \delta} \right) = \frac{1}{2} \gamma h^2(\lambda); \quad (2.25)$$

Наиболее применяема формула, которая получается из приведенной выше для случая, когда поверхность земли – горизонтальная плоскость ( $\beta = 0$ ), напорная грань стенки вертикальна ( $\delta = 0$ ), и стенка – идеально гладкая ( $\varphi_0 = 0$ ):

$$E = \frac{1}{2} \gamma h^2 \left( \operatorname{tg}^2 \left( 45^\circ - \frac{\varphi}{2} \right) \right) = \frac{1}{2} \gamma h^2(\lambda). \quad (2.26)$$

### III. ЗАДАЧИ НА ОПРЕДЕЛЕНИЕ ДАВЛЕНИЯ СЫПУЧЕГО ТЕЛА НА ОГРАЖДЕНИЕ

Рассмотренные выше теория Кулона, теоремы Ребхана, построение Понселе и полученные с их помощью формулы позволяют определить давление на подпорные стенки заданного очертания.

В практике проектирования графический способ применяется довольно редко (в основном ограничиваются вычислениями по соответствующим формулам), однако этот способ хорош тем, что он не только позволяет определить величину давления грунта на подпорную стенку с достаточной точностью и уяснить порядок такого вычисления, но и решить ряд важных сопутствующих задач. Среди таких задач основными являются определение положения поверхности скольжения, как следствие – определение габаритов призмы обрушения, и ограничение опасной зоны на поверхности удерживаемой засыпки.

Для сравнения в дальнейшем наряду с графическим методом, будем приводить решения по соответствующим формулам.

**Задача.** Графически определить силу давления грунта на подпорную стену высотой 8 м при следующих исходных данных: угол наклона стены к вертикали  $\delta = 15^\circ$ , поверхность засыпки – горизонтальна ( $\beta = 0$ ), удельный вес грунта  $\gamma = 20 \text{ кН/м}^3$ , угол внутреннего трения грунта  $\varphi = 25^\circ$ , угол трения грунта о стену  $\varphi_0 = 10^\circ$ . Определить также положение плоскости скольжения.

Построение для указанной задачи (порядок построения описан в п. 2.3) приведено на рис. 3.1. Полученная величина давления грунта  $E$  и положение плоскости скольжения приведено на рис. 3.1. Для сравнения приведено решение задачи по рассмотренным выше формулам (2.25):

$$E = \frac{1}{2} \gamma h^2 \frac{\cos^2(\varphi - \delta)}{\left[ 1 + \sqrt{\frac{\sin(\varphi + \varphi_0) \sin(\varphi - \beta)}{\sin \psi \cos(\beta - \delta)}} \right]^2 \sin \psi \cos^2 \delta} = \frac{1}{2} \gamma h^2 \lambda;$$

$$\psi = 90 - \delta - \varphi_0 = 90 - 15 - 10 = 65^\circ;$$

$$\lambda = \frac{\cos^2(25 - 15)}{\left[ 1 + \sqrt{\frac{\sin(25 + 10) \sin(25 - 0)}{\sin 65 \cos(0 - 15)}} \right]^2 \sin 65 \cos^2 15} = 0.4924;$$

$$E = \frac{1}{2} \gamma h^2 \lambda = \frac{1}{2} \cdot 20 \cdot 8^2 \cdot 0.4924 = 315.13 \cdot \kappa H / m;$$

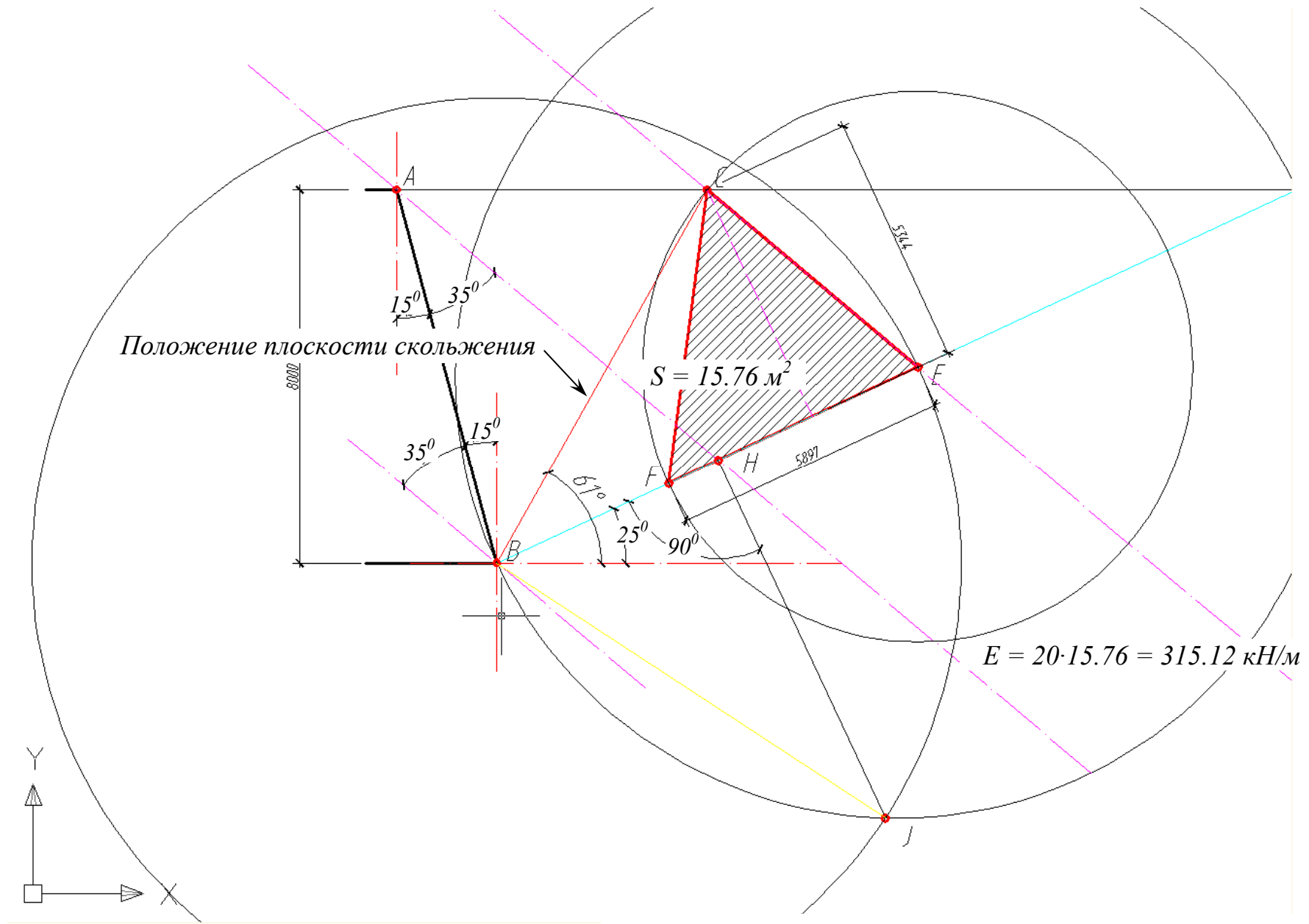


Рис. 3.1. Построение для решения задачи на стр. 26

#### IV. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ДАВЛЕНИЯ СЫПУЧЕГО ТЕЛА ПО ВЫСОТЕ ОГРАЖДЕНИЯ

Давление сыпучего тела на подпорную стену определяется не только величиной и направлением, но также и законом распределения, от которого зависит положение равнодействующей этой нагрузки.

Для получения закона распределения давления по высоте ограждения принимают следующее допущение:

при сдвиге стены высотой  $h$  давление сыпучего тела на ее верхнюю часть высотой  $z$  не зависит от того, сдвигается или нет нижняя часть стены, то есть давление на верхнюю часть будет таким же, как для стены высотой  $z$  (рис. 4.1).

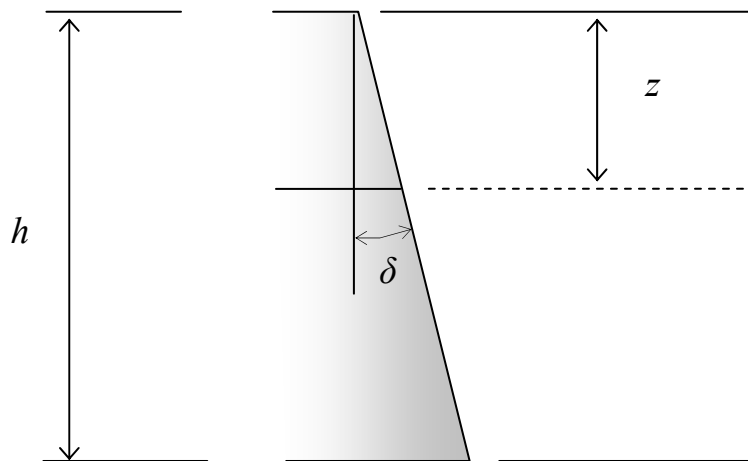


Рис. 4.1. Схема к допущению для получения закона распределения давления по высоте ограждения

Чаще всего эпюру давлений строят на вертикальной проекции стены, а её ординаты откладывают горизонтально. Ординаты эпюры:  $q = \gamma \cdot z \cdot \lambda$ ;

здесь  $\lambda$  – см. обозначение в формуле (2.25). При этом ординаты необходимо предварительно разделить на  $\cos \delta$ .

Величина активного давления сыпучего тела на стену возрастает пропорционально глубине  $z$ , и эпюра давления будет в виде треугольника с наибольшей ординатой  $q$  на уровне подошвы стены.

Равнодействующая активного давления сыпучего тела приложена на уровне центра тяжести эпюры давления (рис. 4.2). Так как эпюра имеет вид треугольника, то её центр тяжести находится на высоте  $h/3$  от подошвы стены. Равнодействующая  $E$  составляет с нормалью к плоскости стены угол  $\varphi_0$ .

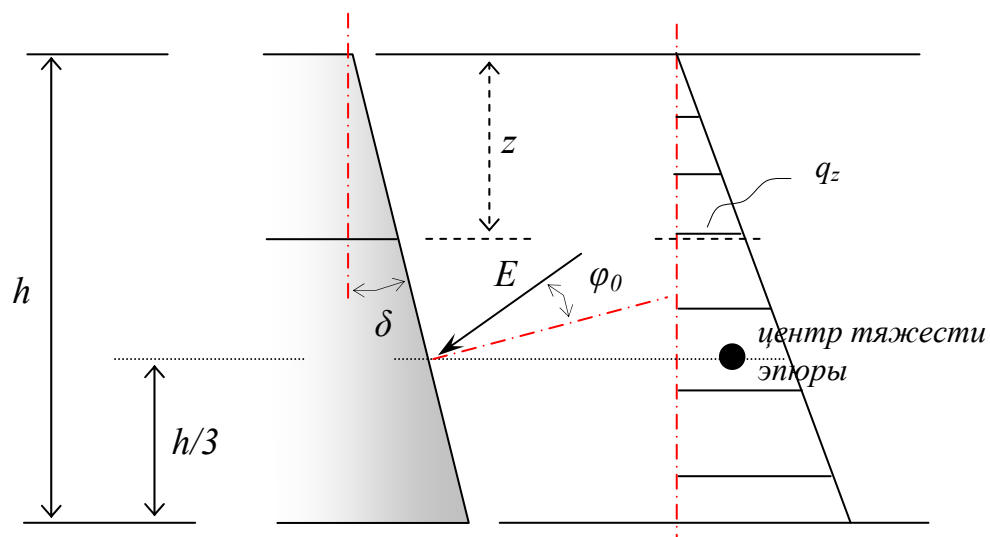


Рис. 4.2. Схема к допущению для получения закона распределения давления по высоте ограждения

## V. РАСЧЁТ ПАССИВНОГО ДАВЛЕНИЯ

До сих пор мы рассматривали случай, когда давление стремится опрокинуть ограждение (*активное давление – распор*). Однако очень часто возникают ситуации, когда ограждение само «наваливается» на засыпку и вызывает противодействие сыпучего тела (рис. 5.1).

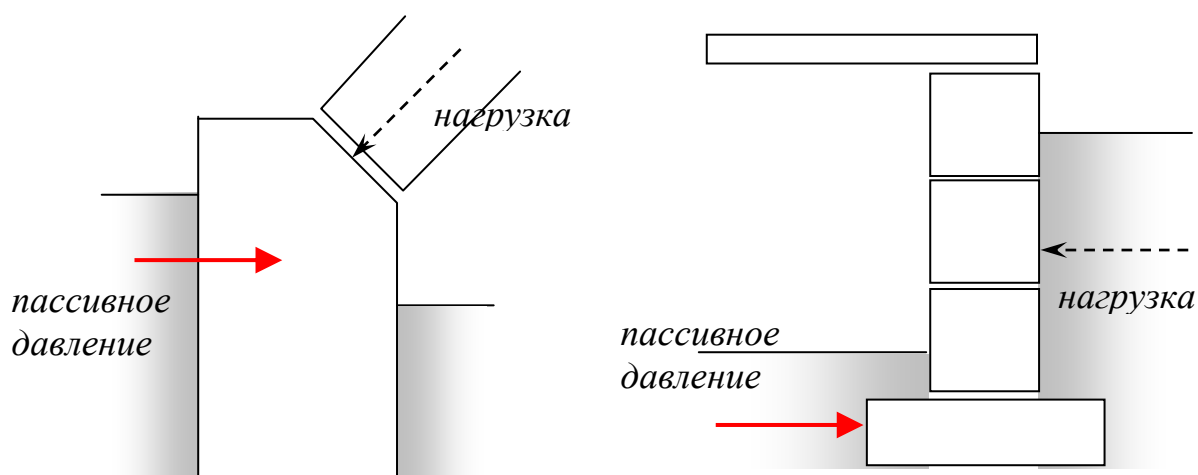


Рис. 5.1. Примеры возникновения пассивного давления

Сопротивление сыпучего тела выпиранию его каким-либо ограждением называется *пассивным давлением (отпором)*.

Пассивное давление определяется на основании тех же построений, которые служат для определения активного давления с одним отличием: знак углов трения  $\varphi$  и  $\varphi_0$  следует изменить на обратный.

Пассивное давление всегда значительно больше активного: стенка смещается в сторону засыпки и стремится приподнять призму обрушения. Силы трения на плоскости скольжения и на поверхности стенки отклоняются в сторону, обратную движению призмы, т.е. вниз. Поэтому давление, необходимое для разрушения сыпучего тела, значительно возрастает.

Построение для определения пассивного давления представлено на рис. 5.2: выполнено построение Понселе с использованием теорем Ребхана. Определяется призма, которая оказывает наименьшее сопротивление выпиранию.

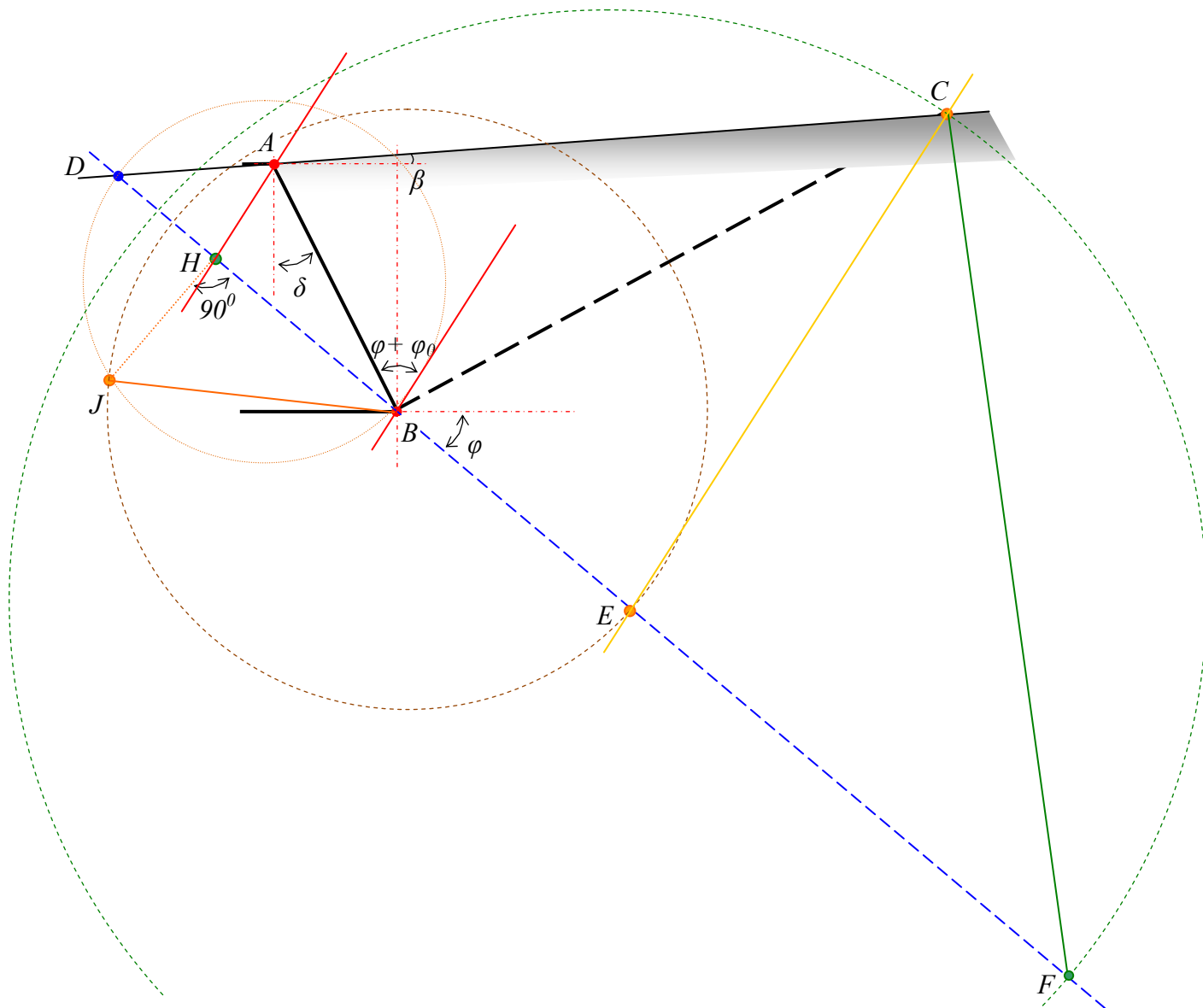
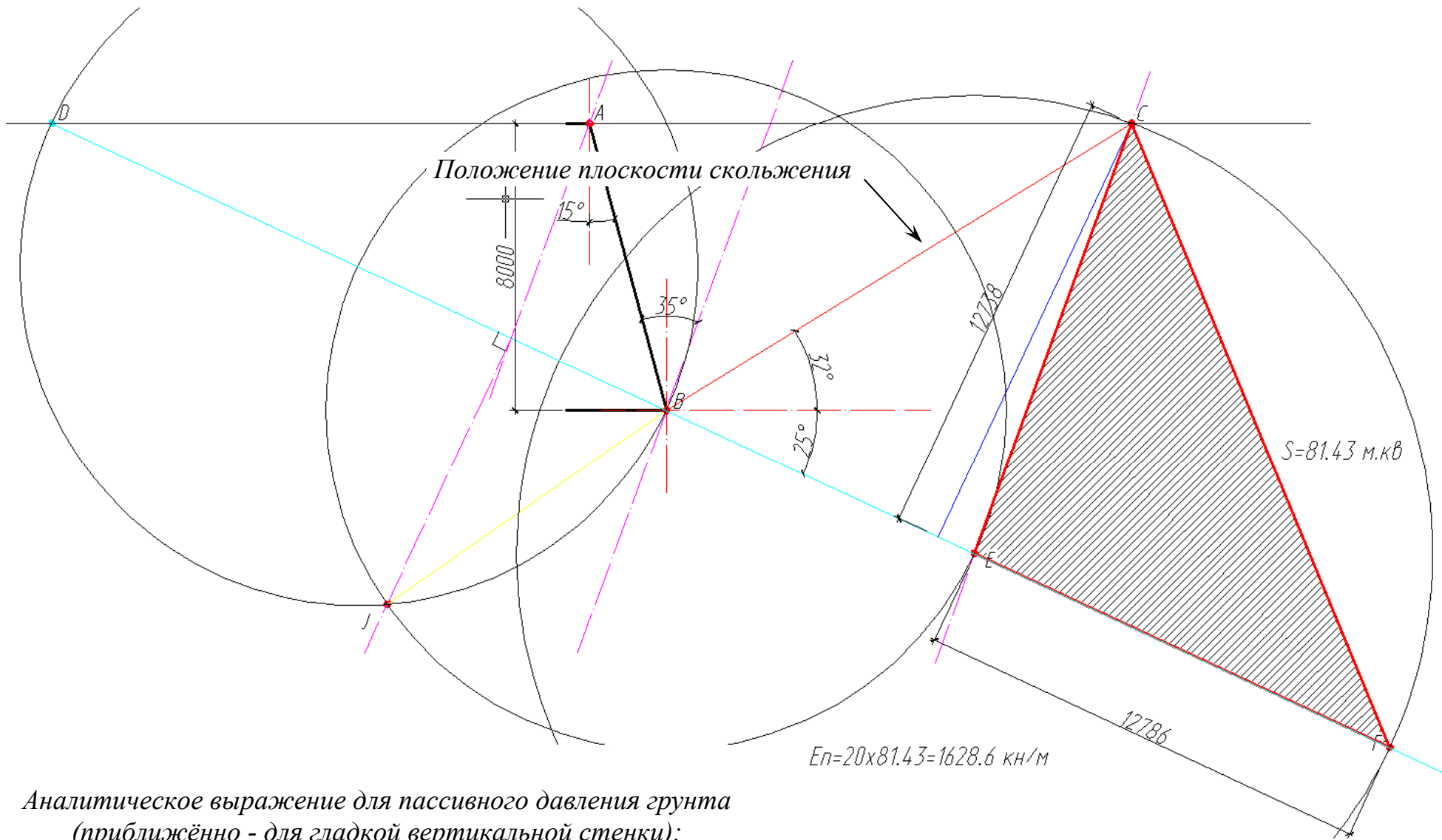


Рис. 5.2  
Построение к определению пассивного давления

**Задача.** Графически определить силу пассивного давления грунта на подпорную стену высотой 8 м при следующих исходных данных: угол наклона стены к вертикали  $\delta = 15^\circ$ , поверхность засыпки – горизонтальна ( $\beta = 0$ ), удельный вес грунта  $\gamma = 20 \text{ кН/м}^3$ , угол внутреннего трения грунта  $\varphi = 25^\circ$ , угол трения грунта о стену  $\varphi_0 = 10^\circ$ . Определить также положение плоскости скольжения. Построение и величина пассивного давления  $E_n$  приведены на рис. 5.3.





Аналитическое выражение для пассивного давления грунта  
(приближённо - для гладкой вертикальной стенки):

$$E = \frac{1}{2} \gamma h^2 \lambda_n = \frac{1}{2} \gamma h^2 \cdot \operatorname{tg}^2 \left( 45^\circ + \frac{\varphi}{2} \right) = 1576.9 \cdot \text{кН} / \text{м}.$$

Рис. 5.3  
Построение к задаче на стр. 32

## VI. РАСЧЁТ ДАВЛЕНИЯ СЫПУЧЕГО ТЕЛА НА ОГРАЖДЕНИЕ ЛОМАНОВОГО ОЧЕРТАНИЯ

Интересен графо-аналитический способ решения этой задачи. Он основан на рассмотренных ранее предпосылках теории Кулона, теоремах Ребхана, построениях Понселе и др., с введением некоторых новых допущений.

Способ является приближённым и заключается в том, что вначале построение Понселе выполняется только для верхней грани стенки, без учёта расположенных ниже изломов напорной грани. Следующая грань условно продлевается до поверхности земли и далее выполняется построение Понселе для полученной грани. И так далее, при этом для каждого участка строится диаграмма интенсивности давлений, ординаты которой выбираются из условия равенства её площади и площади соответствующего треугольника Ребхана, умноженной на удельный вес материала засыпки. Для каждой эпюры интенсивности давлений учитывается только та её часть, которая соответствует рассматриваемому участку напорной грани подпорной стенки.

Далее рассмотрим задачу определения давления грунта на массивную подпорную стену, имеющую один излом напорной грани.

**Задача.** Пусть напорная грань подпорной стенки ограничена двумя плоскостями:  $AB$  и  $BB_1$ . Таким образом, поверхность стенки оказывается разделенной на два участка. Исходные данные: высота стенки  $h = 8\text{ м}$ , угол наклона стены к вертикали на участке  $AB$ :  $\delta = 15^\circ$  (очертание стенки  $ABB_1$  см. на рис. 6.1), поверхность засыпки – горизонтальна ( $\beta = 0$ ), удельный вес грунта  $\gamma = 20 \text{ кН/м}^3$ , угол внутреннего трения грунта  $\varphi = 25^\circ$ , угол трения грунта о стену  $\varphi_0 = 10^\circ$ .

Порядок построения:

1. Вначале выполняется построение Понселе для верхней части стенки независимо от нижней части.

2. Строим для участка  $AB$  треугольник Ребхана и диаграмму интенсивности давлений. Ордината эпюры интенсивности выбирается такой, чтобы её площадь равнялась площади треугольника Ребхана  $CEF$ , умноженной на удельный вес грунта  $\gamma$ .

3. Продолжаем стенку  $BB_1$  до пересечения с поверхностью земли. Проведем построение Понселе для фиктивной стенки  $B_1BA_1$ .

4. Получаем треугольник Ребхана для стенки  $B_1BA_1$ . Строим для неё диаграмму интенсивности давлений, для которой учитываем только нижнюю часть (на участке  $BB_1$ ).

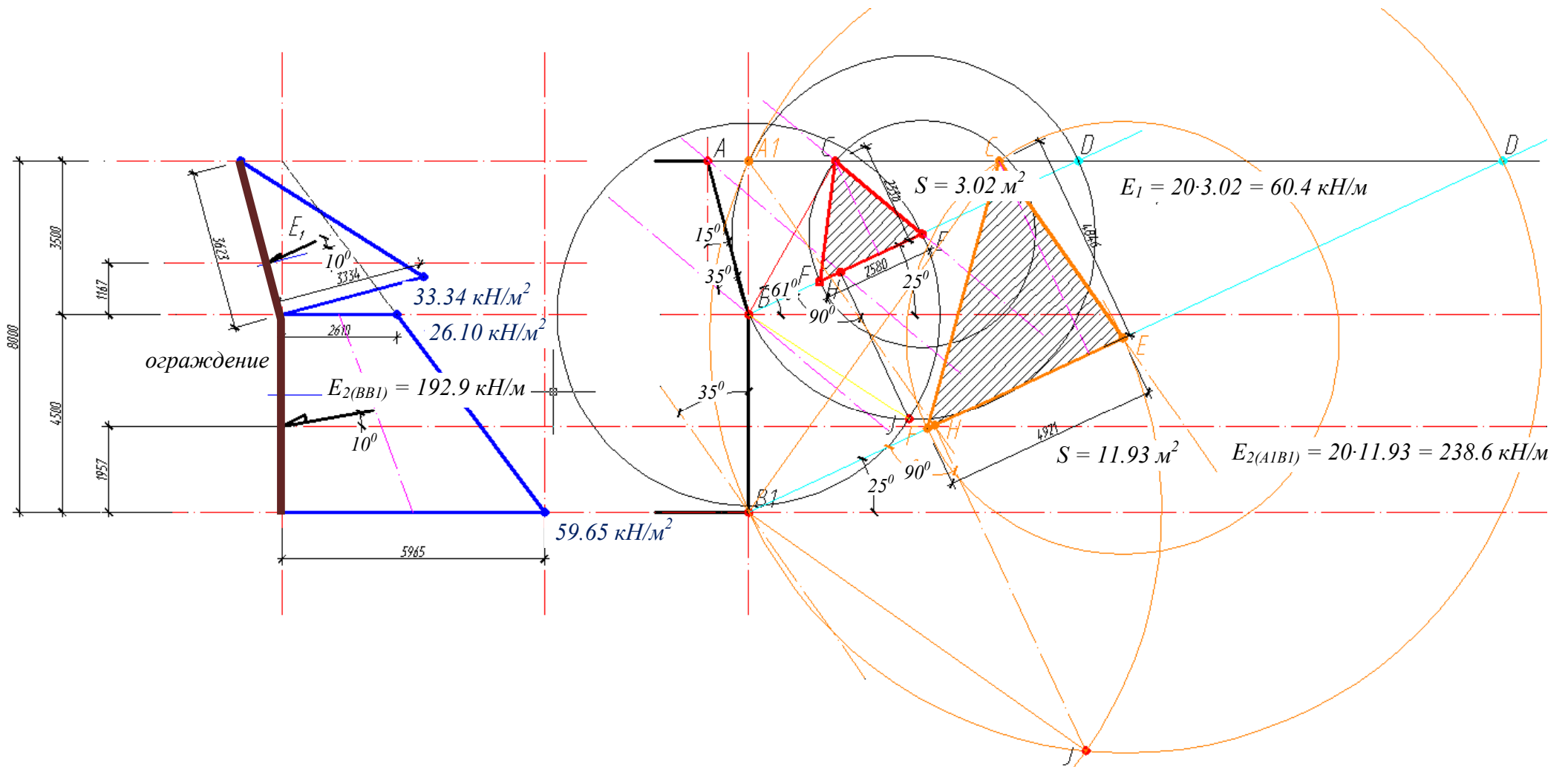


Рис. 5.4. Построение к задаче на стр. 34

## ЛИТЕРАТУРА

1. Гастев В.А. Краткий курс сопротивления материалов. – М.: Наука – 1977.
2. Глушков Г.И. Расчет сооружений, заглубленных в грунт. – М.: Стройиздат, 1977.
3. Горбачёв К.П., Краснов Е.Г., Субботницкий В.В. Основы механики деформируемого твёрдого тела. – Владивосток: Уссури, 1998.
4. Дуброва Г.А. Методы расчета давления грунтов на транспортные сооружения. – М.: Транспорт, 1969.
5. Иванов П.Л. Грунты и основания гидротехнических сооружений. Учеб. Для гидротехн. спец. вузов. – М.: ВШ, 1985.
6. Клейн Г.К. Строительная механика сыпучих тел. – М.: Стройиздат, 1977.
7. Макаров Е.В., Светлаков Н.Д. Справочные таблицы весов строительных материалов. – М.: Стройиздат, 1971
8. Проектирование подпорных стен и стен подвалов. Справочное пособие к СНИП. /ЦНИИпромзданий Госстроя СССР. – М.: Стройиздат, 1990.
9. Рабинович И.М. Основы строительной механики стержневых систем. – М.: Госстройиздат, 1960.
10. СНИП 2.06.07-87\*. Подпорные стены, судоходные шлюзы, рыбопропускные и рыбозащитные сооружения. – М.: Стройиздат, 1989.
11. СНИП 2.09.03-85. Сооружения промышленных предприятий. Подземные сооружения. – М.: Стройиздат, 1985.
12. Снитко Н.К. Статическое и динамическое давление грунтов и расчет подпорных стенок. – Л.: Стройиздат, 1970.
13. Соколовский В.В. Статика сыпучей среды. – М.: Стройиздат, 1990.
14. Стоценко А.А., Доценко С.И., Мальков Н.М., Белоконь М.А. Курс Теории сооружений. Строительная механика. – Владивосток: ДВГТУ, 1994.
15. Тетиор А.Н. Подпорные стены в транспортном строительстве. – М.: Стройиздат, 1990.
16. Цытович Н.А. Механика грунтов. – М.: ВШ, 1983.

## **ПРИЛОЖЕНИЕ 1**

### **ПРИМЕР ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ**

**Задача.**

1. Определите графически величину активного давления грунта  $E_a$  на ограждение ломаного очертания (рис. 7.1);
2. Постройте эпюру распределения интенсивности активного давления грунта по высоте стенки, определите положение равнодействующей активного давления для каждого участка;
3. Проверьте выполненные построения, определив величину давления  $E_a$  для каждого участка аналитически;
4. Определите графически величину пассивного давления грунта  $E_n$  на стенку ломаного очертания;
5. Проверьте выполненные построения, определив величину давления  $E_n$  аналитически;
6. Выполните проверку устойчивости подпорной стенки на плоский сдвиг по подошве (согласно [8]), приняв во внимание, что стенка выполнена из железобетона ( $\gamma_{cm} = 25 \text{ кН/м}^3$ ).

*Исходные данные*

Вариант	$h$ , м	$h_1$ , м	$\gamma$ , кН/м <sup>3</sup>	$\delta$ , <sup>0</sup>	$\beta$ , <sup>0</sup>	$\varphi$ , <sup>0</sup>	$\varphi_0$ , <sup>0</sup>	$E_a, E_n$ кН/м
1	6.2	3.2	19.5	10	5	30	6	?

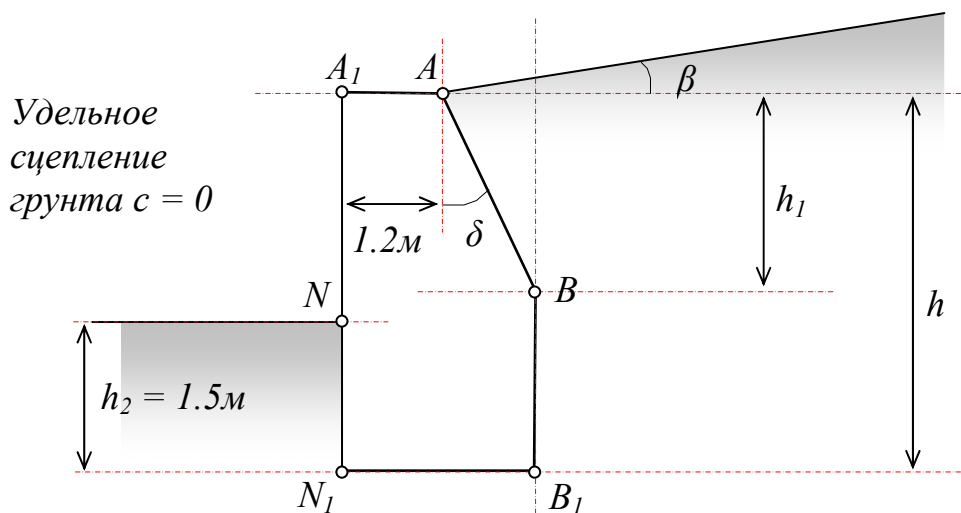


Рис. 7.1. Схема к задаче